gli speciali di education 2.0

Matematica: didattica, esperienze e tecnologie

l'editoriale

l'approfondimento: la didattica della matematica

l'approfondimento: esperienze in classe

l'approfondimento: numeri, forme e ICT

La matematica salverà l'umanità?
di Domenico Lenzi

La matematica è una delle materie meno amate al mondo, a parte qualche significativa eccezione che si riscontra in alcune nazioni asiatiche. Eppure circa 40 mila anni fa, con la comparsa dell'Homo Sapiens sapiens, per la specie umana si ebbe uno sviluppo significativo delle capacità simboliche e cognitive, confermato proprio da alcuni reperti archeologici riguardanti i numeri, che consistono in una tibia di lupo (di circa 42 mila anni), trovata in Cecoslovacchia, e in una fibula di babbuino (di circa 37 mila anni), trovata a Lelembo, nello Swaziland. Su quei reperti sono presenti delle incisioni che, per il modo in cui risultano prodotte, hanno l'aspetto di una rappresentazione numerica. Il che ci induce a riguardare l'Homo Sapiens sapiens come una sorta di Homo Mathematicus.

Ma allora, perché – come ha chiesto Linda Giannini ad Anna Cerasoli, in un'intervista curata per Education 2.0 (si veda pagina 4) – gli studenti hanno così grandi difficoltà in matematica? E la Cerasoli ha risposto: "La matematica tratta oggetti astratti e perciò non può fare a meno di un linguaggio simbolico. Spesso è proprio questo linguaggio, lontano da quello naturale, a intimidire, a scoraggiare".

Eppure, in ambito infantile, il modo di comunicare rivela una tendenza naturale alla precisione, che è tipica del linguaggio scientifico/matematico. Modi di esprimersi di tipo metaforico e allegorico, e altri registri comunicativi – per altro importanti dal punto di vista dell'immediatezza espressiva – non sono ancora stati acquisiti da parte di chi muove i primi passi scolastici; onde la cura del linguaggio della precisione potrebbe andare a beneficio dell'educazione alla matematica, e non solo.

Infatti prima dei sei anni il bambino ha una percezione delle cose di tipo sincretico-globale, cosicché la visione d'insieme quasi sempre rende difficile la percezione di singole parti, a meno che queste non siano familiari (ma in tal caso per il bambino può risultare difficile ricomporle in un tutto ben organizzato). E queste difficoltà di tipo percettivo possono favorire forme comunicative approssimative, con notevoli danni non solo nell'ambito della comunicazione ordinaria, ma anche nell'ambito della comunicazione e dell'educazione matematica, tanto da mettere in serio pericolo l'acquisizione delle capacità razionali che questa disciplina può favorire coltivando – a partire dai molti perché tipici dei nostri bambini – la precisione di linguaggio.

Perciò non a caso ci sentiamo in sintonia con Paolo Francini, che per Education 2.0 ha scritto (si veda pagina 6): "Il contributo più genuino della matematica per la formazione di un cittadino consapevole ed evoluto non è l'accumulo di informazioni più o meno interessanti e utilizzabili, ma la salda conquista del metodo dimostrativo: come criterio di validazione e di spiegazione, come strumento tenace, per quanto frugale, di indagine e di costruzione di sapere".

Però, purtroppo, la matematica – sulla cui importanza quasi tutti si dicono d'accordo – resta misteriosa per la stragrande maggioranza delle persone; anche a causa del fatto che il suo insegnamento, a parte alcune lodevoli eccezioni, viene impartito in modo inadeguato sin dai primi anni scolastici.

A giugno si svolgerà a Frascati il primo dei due convegni annuali del gruppo Scienza e Fede, che quasi trent'anni fa fu costituito dai matematici Ennio De Giorgi e e Giovanni Prodi, insieme ad altri illustri scienziati italiani. Questa volta il tema riguarderà "il libero arbitrio". In vero, tesi sul funzionamento del cervello umano che ricorrono con una certa frequenza pretenderebbero di ricondurre le nostre attività a reazioni condizionate di tipo fisiologico e irrazionale, declassando i nostri comportamenti a un livello bestiale.

Noi non siamo d'accordo con queste tesi, però esse delineano un pericolo che non andrebbe sottovalutato. Chissà che – come si diceva con Cosimo De Mitri in "Fiammiferi e cifre decimali", ancora per Education 2.0 (si veda pagina 14) – un insegnamento della matematica depurato di alcuni aspetti "vessatori" e più attento al carattere razionale della disciplina non consenta ai nostri ragazzi di riappropriarsi di se stessi e delle loro facoltà critiche.

Diversamente, come Umberto Eco scrisse alcuni anni fa sul Corriere della Sera, il prossimo stadio evolutivo della specie umana sarà quello dell'Homo Stupidus stupidus.

Raccontare la matematica - Intervista ad Anna Cerasoli
di Linda Giannini

Linda Giannini intervista Anna Cerasoli, ex insegnante di matematica che, insieme al fratello Mauro, ha scritto numerosi manuali scolastici. Negli ultimi tempi, unica italiana in questo campo, si è dedicata alla divulgazione scrivendo di matematica in forma narrativa.

Un nonno, ex insegnante, racconta al nipotino curioso e creativo come sono nati i numeri, cosa sono i frattali o i numeri binari, perché costruire una casa quadrata è più conveniente che costruirla rettangolare o perché le bottiglie dei profumi sono di solito alte e strette, quando un gioco è equo, chi era Archimede e perché è considerato il più grande matematico di tutti i tempi, come mai vestirsi e svestirsi equivale a risolvere un'equazione…

D: Come hai avuto l'idea di unire narrativa e matematica?

R: Mi è sempre dispiaciuto sentire, anche da persone intelligenti, parole di sconforto nei confronti di questa materia: "è difficile, è noiosa, serve solo a risolvere esercizi astratti…". Così, qualche anno fa, ho pensato di raccontare la matematica partendo da esempi della vita quotidiana e usando un linguaggio molto facile. A quel tempo mio figlio aveva otto anni e con le sue domande mi spingeva a trovare risposte semplici e convincenti. Poi ho pensato di inserire il tutto in una bella relazione nonno-nipotino, con un nonno paziente e generoso di attenzioni e un nipotino curioso. Quale migliore situazione per apprendere?!

D: Secondo te perché gli studenti hanno così grandi difficoltà in matematica?

R: La matematica tratta oggetti astratti e perciò non può fare a meno di un linguaggio simbolico. Spesso è proprio questo linguaggio, lontano da quello naturale, a intimidire, a scoraggiare... In molti casi la rappresentazione rigorosa di un concetto matematico è più difficile del concetto stesso. Questo handicap potrebbe essere superato presentando la materia a partire da questioni concrete e passando all'astrazione solo in un secondo momento. Purtroppo, però, la matematica insegnata nelle scuole è solo teorica, con esercizi di cui non si coglie il senso e l'utilità. Tutto ciò provoca frustrazione nello studente che molto spesso abbandona.

D: Cosa ti dicono i lettori? Sei riuscita a convincerli che la matematica può essere gradevole?

R: Ho ricevuto molte e inaspettate soddisfazioni da questi piccoli libri. Non solo alunni, ma insegnanti e anche semplici persone mi scrivono per ringraziarmi di aver detto in modo semplice cose che a loro erano sembrate astruse e incomprensibili. Capire un concetto, risolvere un problema dà un grande piacere, ci si sente meglio, ci si stima di più. Ed è proprio il forte senso di sé che ci spinge a nuove curiosità e nuove scoperte.

D: Fino a che punto la matematica è presente in tutto ciò che ci circonda?

R: Quando veniamo concepiti, sono regole matematiche a governare i caratteri che erediteremo dai genitori. Poi, tutta la nostra vita si svolge nello spazio-tempo decritto anch'esso da formule matematiche; gli utensili, i mezzi di trasporto, i mezzi di comunicazione… vengono costruiti grazie a formule matematiche; le stesse relazioni tra individui, ma anche l'arte e, come tutti sanno, i giochi hanno a che fare con questa materia.

D: A proposito di giochi, quali erano i tuoi giochi preferiti quando eri bambina?

R: Mi è sempre piaciuto costruire. Di tutto, dagli abiti per le bambole, alle casette di cartone con tutte le suppellettili, ai cieli stellati per il presepe… Ho disegnato molto, ritagliato, colorato, cucito abiti di carta per carnevale, fatto teatrini con vecchie cassette della frutta… Usavo chiodi e martello con grande maestria. Sarà che stavo sempre con mio fratello Mauro e i suoi amici ragazzacci! Ero sempre in movimento perciò non amavo i giochi in cui bisognasse essere attenti e riflessivi.

D: Ci sono giochi a cui ami ancora giocare?

R: Solo tardi ho scoperto il gioco delle carte e, più in generale, i giochi da tavolo. Tra quelli che preferisco c'è Scarabeo o Machiavelli, una sorta di Scala Quaranta, ma con la possibilità di rimescolare le carte e ricomporle in aggregazioni differenti. Generalmente preferisco i giochi che coniugano il caso al ragionamento, meglio ancora se si giocano in compagnia. Devo dire però che, sebbene consideri il gioco un ottimo passatempo, benefico per l'umore e per il cervello, di fatto non gioco spesso. Se ho del tempo libero mi piace scrivere, costruire situazioni, intrecciare fatti. Comunque non ho mai giocato al gioco del Lotto o simili, giochi in denaro non equi.

D: Qual è il legame tra regola del gioco e la matematica? e la geometria?

R: Tutti sanno che le regole di ogni gioco sono, proprio perché regole, da accettare senza discussione. "È la regola!" si esclama per mettere fine a una controversia. Dunque, per noi matematici, si tratta di veri e propri assiomi. Le partite, poi, proprio perché non devono contraddire tali assiomi, non sono altro che teoremi. Dunque siamo di fronte a sistemi assiomatici-deduttivi, in forma di divertimento. Cosa hanno a che fare i giochi con la geometria? Beh… la geometria è la regina delle scienze assiomatiche-deduttive, se non altro perché è stata la prima a essere organizzata in questo modo. Ecco il motivo della grande valenza formativa del gioco. Non dimentichiamo poi che importanti branche della matematica sono nate proprio dal gioco. Ne sono esempi la Teoria della Probabilità e la Topologia.

D: In quale misura è utile e possibile inventare nuove regole di uno stesso gioco?

R: Penso che possa essere utile partire da un gioco e vedere come si trasforma, modificando qualche sua regola. Allena il cervello a mantenere saldo il metodo deduttivo pur nell'elasticità del diverso ambito. È proprio così che si apprezza l'essenza della regola e il suo legame con il sistema. A pensarci bene, il gioco Machiavelli, di cui parlavo prima, nasce proprio da un altro gioco, la Scala Quaranta, con l'aggiunta di una nuova regola.

D: Narrazione, matematica, geometria e rappresentazione grafica: c'è qualche altro ingrediente che vorresti aggiungere nel tuo prossimo libro? E quando pensi di scriverlo?

R: Sto scrivendo un libro che uscirà nel prossimo anno. È dedicato a bambini delle ultime classi elementari e ancora una volta mi pongo l'obiettivo di presentare la matematica che è intorno a noi, in modo leggero e simpatico. Scrivere mi diverte e ho notato che più questo accade, più il libro stesso è divertente. È questo l'ingrediente che curerò di più.

Per approfondire:

• Tre volumetti, tradotti in molte lingue, che fanno fare pace con la matematica: "I Magnifici Dieci", "La sorpresa dei Numeri", "Mister Quadrato", editi da Sperling&Kupfer.

• "Sono il numero 1", edito nel 2008 per la casa editrice Feltrinelli, è la storia di un bambino che racconta, con entusiasmo, come ha fatto a passare dal 'voltastomaco' nei confronti della matematica a trovarla addirittura facile e divertente.

Quale matematica nel nuovo liceo scientifico?

di Paolo Francini

La matematica per il cittadino: la scuola deve affrettare il passo per un insegnamento aggiornato della matematica. Se vuole aiutare gli studenti ad affrontare il mondo civile.

Se non intervengono variazioni, tra due anni entreranno in vigore le Indicazioni Nazionali riportate nel decreto legislativo 226 del 2005. Quei curricoli riflettono i documenti elaborati dell'Unione Matematica Italiana dal titolo "La matematica per il cittadino", con l'intento di sottolineare il ruolo della matematica per l'esercizio di una cittadinanza attiva e consapevole. Particolare attenzione va ai saperi ritenuti essenziali per tutti, al di là dello specifico percorso formativo. Ci si allontana dal tradizionale, stretto, connubio tra matematica e scienze fisiche, per valorizzare elementi più direttamente utilizzabili nella vita quotidiana, economica e sociale. Ecco quindi frequenti rimandi al linguaggio statistico (dati, istogrammi, grafici, indici vari) e all'uso dei calcolatori.

È chiara la sintonia di fondo con i quadri di riferimento OCSE adottati per i test PISA. L'interesse si appunta sul ruolo della matematica nel mondo reale, nella vita personale e lavorativa, nell'esercizio di cittadinanza attiva e costruttiva. Si fatica però a individuare, nei curricoli delle Indicazioni, dei fili conduttori unificanti. Resta l'impressione di una raccolta pensata più in senso informativo che formativo. Anche gli spunti storici, culturali, filosofici, che pure non mancano, mantengono un carattere che appare alquanto occasionale e frammentato.

Il contributo più genuino della matematica per la formazione di un cittadino consapevole ed evoluto non è l'accumulo di informazioni più o meno interessanti e utilizzabili, ma la salda conquista del metodo dimostrativo: come criterio di validazione e di spiegazione, come strumento tenace, per quanto frugale, di indagine e di costruzione di sapere.

La matematica è, per eccellenza, scienza aperta, accessibile, libera da ogni autorità o verità imposta. Chiunque abbia pazienza e fantasia può a sua volta contribuirvi, a patto di seguire ragionamenti in tutto onesti e conseguenti. È l'attività matematica stessa la migliore educazione che essa può dare per l'esercizio autonomo del pensiero e della cittadinanza. Non occorre perdere in un lungo campionario di elementi più o meno utili nella vita pratica.

Oltretutto, le Indicazioni falliscono proprio nel loro terreno di gioco: mancano l'occasione di cogliere il "senso profondo" della matematica nel nostro tempo. È il tempo del digitale, inteso come categoria che affianca, o rimpiazza, l'analogico: non più disco in vinile e pellicola, ma CD e DVD. Dal continuo al discreto. L'informazione per essere immagazzinata ed elaborata deve essere codificata in maniera discreta. Questo, che già era vero per il pentagramma e l'alfabeto, assurge a tratto distintivo della nostra epoca dal momento che strumenti di calcolo e di comunicazione sempre più potenti e più diffusi interagiscono in maniera pervasiva con le nostre vite.

Non basta più, neppure a livello di cultura generale, quel percorso che procedeva dall'algebra e la geometria per culminare nel calcolo infinitesimale. Era la matematica storicamente legata al cammino della fisica, la matematica adatta a trattare del moto dei pianeti e dell'equilibrio delle travi. Le Indicazioni allentano questo connubio, sembrano cogliere la sua insufficienza, ma non sanno individuare linee guida altrettanto pregnanti. Tendono così a disperdersi in mille rivoli.

Si finisce per trascurare per intero la matematica che da cinquant'anni almeno è connaturata allo sviluppo dell'informatica. La matematica adatta a operare con i bit. Dai sistemi di cifratura, alla trasmissione o la compressione dei dati, l'elaborazione di immagini o di suoni, i motori di ricerca o di simulazione, la trasmissione a distanza di informazioni, i processori sempre più rapidi, e così via, fino ovviamente al telefonino o i videogiochi o gli effetti speciali dei film.

È qui, fin negli oggetti di uso più comune, che si annida la matematica più caratteristica dell'età contemporanea, che ha reso possibile la nascita di questi oggetti: la matematica discreta. Non si tratta di un'omissione meramente tecnica, un capitolo da aggiungere al manuale: è un deficit culturale, profondo, di pensiero, un asse portante dell'evoluzione scientifica e tecnologica, col quale la nostra scuola non ha ancora iniziato, neppure vagamente, a relazionarsi.

Un formidabile ripensamento curricolare è necessario. Gli studenti che escono dai licei scientifici, e non solo, dovranno sapersi orientare con i metodi del ragionamento combinatorio. Dovranno conoscere alcune idee, alcuni problemi, alcune tecniche tipiche della matematica discreta. Per esempio alcuni elementi di aritmetica modulare o di teoria dei grafi, alcuni problemi di strategia combinatoria, alcuni conteggi classici, alcuni concetti probabilistici, le successioni per ricorsione, e così via. Si tratta peraltro di un universo molto vario, che può sollecitare l'interesse o la curiosità dei giovani, al di là dei rigidi binari della matematica scolastica convenzionale. E si tratta di tematiche molto attuali, sulle quali è corsa e corre una gran mole di ricerca, anche a livello teorico (non solo applicativo).

Tutto questo, è perfino superfluo dirlo, non metterà in soffitta né la geometria euclidea né la gloriosa analisi matematica, ambientate nel familiare mondo del continuo. Al contrario: gli ambiti più tradizionali potranno trarre nuova linfa e nuovo slancio dagli spunti e dalle profonde connessioni che potranno stabilirsi con il regno variegato delle entità discrete.

L'insegnamento della matematica: un problema?

di Sergio Pea

Le statistiche internazionali sono impietose nei confronti della scuola secondaria italiana: la inseriscono agli ultimi posti in graduatoria quanto a competenze matematiche. Ma la scuola italiana è così scadente in ambito matematico? E perché?

I risultati che la scuola italiana ha ottenuto in questi anni in ambito matematico sono contraddittori: quelli di alcuni studenti sono di assoluta eccellenza e ottengono buoni riconoscimenti sia nel campo della ricerca che delle professioni, mentre molti studenti non riescono a raggiungere il diploma di Stato o lo raggiungono con grande fatica. La cosa più grave è che anche molti diplomati con ottimo punteggio non sono "ben preparati" e, pur possedendo notevoli conoscenze e abilità matematiche, non riescono a utilizzarle nella vita quotidiana o professionale.

Ma quali sono le ragioni per cui il nostro modo di insegnare non funziona più? Ne enuncerò solo due.

1. È cambiata la percezione sociale della scuola: il nostro modello scolastico è costruito per studenti motivati, con un loro obiettivo e ben disposti allo studio. Ora la scuola ha perso immagine sociale: il diploma non garantisce più il posto di lavoro, paradossalmente sono più stabili e meglio retribuiti i lavori manuali e a basso livello di scolarizzazione rispetto a quelli di tipo intellettuale. La conseguenza: studenti con scarse aspettative e poco motivati allo studio.

2. Si sono moltiplicate le agenzie formative degli studenti: mass media, strumenti digitali, enti formativi.

Alcuni pedagogisti definiscono i ragazzi di oggi nativi digitali. I loro stili di apprendimento e di pensiero sono molto diversi da quelli di chi, come noi "immigrati digitali", si è formato prima attraverso esperienze di natura psicomotoria nel gioco "fisico" con i propri compagni e poi sui libri.

Gli immigrati digitali seguono un pensiero "sequenziale" (apprendimento teorico poi applicazione) i nativi invece pensano in modo parallelo (apprendimento da esperienze multiple, simultanee e di breve durata). Ciò porta a maggiori difficoltà nell'apprendimento tradizionale, ma ha anche grandi potenzialità tutte da scoprire. Manifestazione evidente di queste potenzialità è il fatto che, per la prima volta nella storia dell'umanità, i figli insegnano ai genitori, ad esempio l'uso delle nuove tecnologie (quanti genitori si affidano ai figli per la gestione di un videoregistratore, piuttosto che di un telefonino o di un computer?).

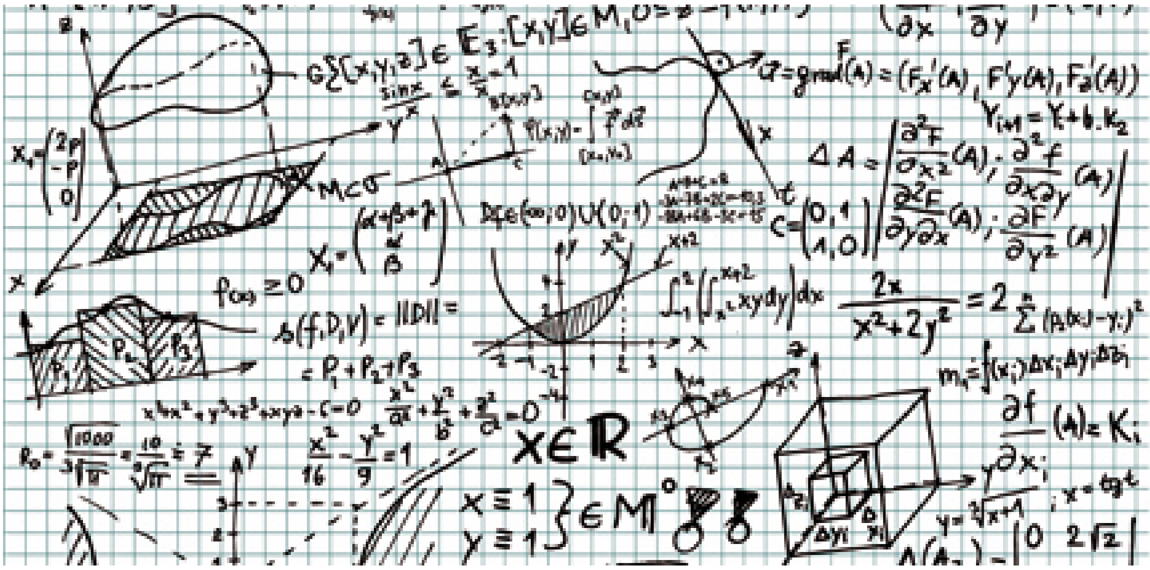
Un altro esempio sono le famiglie immigrate, in cui spesso i figli assumono il ruolo di mediatori culturali nei confronti dei genitori.

Credo sia inutile dare giudizi o porsi domande sulla bontà o meno di questo cambiamento: questa è la realtà che ci si presenta e la società civile ci chiede di affrontarla modificando l'offerta formativa per rispondere alle nuove esigenze che i cambiamenti sociali pongono.

Le indagini internazionali non valutano tanto i saperi matematici quanto le competenze di uso della matematica. Questa scelta è una immediata conseguenza delle tesi di Lisbona, che tutti i paesi europei hanno condiviso, e risponde ai bisogni di una società in continuo cambiamento, in cui l'evoluzione tecnologica richiede a tutta la popolazione alte competenze. La matematica sta diventando uno strumento necessario per vivere consapevolmente la vita quotidiana.

Matematica ed elettronica: l'integrazione dei saperi

di Leonardo Barsantini e Lucia Pinzauti



Un'esperienza di integrazione fra i saperi della matematica e quelli dell'elettronica in un istituto tecnico industriale.

L'insegnamento delle discipline tecnologiche in ambito elettronico richiede una buona conoscenza della matematica. È infatti indispensabile, anche per acquisire una preparazione di base utile a indagare i fenomeni elettronici, poter operare su segnali, funzioni e modelli, ma molti degli studenti che si iscrivono presso il nostro istituto prendono in considerazione soltanto l'aspetto più manuale, collegato ai laboratori di indirizzo, rifiutando gli aspetti del pensiero più astratto collegati anche allo sviluppo matematico.

Per cercare di risolvere il problema, nel precedente anno scolastico, gli insegnanti di matematica e di elettronica hanno sviluppato una riflessione circa l'integrazione della matematica e delle discipline elettroniche, che si è concretizzata in un'ora di compresenza alla settimana (matematica-sistemi elettronici automatici), in una terza classe – fra l'altro molto numerosa – a indirizzo elettronico. L'attività svolta in classe è stata di tipo laboratoriale con l'utilizzo di schede operative sulle quali gli studenti dovevano esercitarsi, rinforzare le proprie competenze e approfondire alcuni concetti fondamentali per le due discipline. Le schede rappresentano la fase finale di un lavoro di riflessione svolto dai due docenti teso a individuare gli elementi comuni nei saperi dei due ambiti. Per esempio, la retta, argomento fondamentale del programma di matematica al terzo anno, fornisce gli strumenti operativi per studiare i trasduttori lineari in ambito elettronico (questi trasformano una grandezza fisica in una grandezza elettrica). Su questo tema abbiamo sviluppato alcune schede che permettono agli studenti di esercitarsi sulla retta applicata ai trasduttori, riflettendo anche sul differente linguaggio specifico utilizzato nelle due discipline: "in elettronica si definiscono sensibilità e offset del trasduttore ciò che in matematica è chiamato coefficiente angolare e ordinata all'origine della retta". Le schede, sviluppate in classe con l'ausilio degli insegnanti, ma riprese anche nel lavoro a casa, hanno proposto casi contestualizzati in ambito elettronico, ma strettamente collegati alle competenze matematiche. Si è cercato di porre la matematica e l'elettronica in un contesto di reciproco rinforzo. Non è soltanto una questione di nomi se si pensa che alcuni dei nostri studenti, pur avendo spiegato loro la differenza dei termini per lo stesso concetto, hanno trovato risultati numerici diversi, per esempio, calcolando la sensibilità e il coefficiente angolare, senza che sorgesse loro alcun dubbio al riguardo. Altri argomenti affrontati, sempre ricercando la trasversalità, sono state le funzioni esponenziali e logaritmiche, i segnali periodici definiti a tratti (per lo studio di forme d'onda per segnali significativi in elettronica), le disequazioni e la goniometria.

Nella prima fase di lavoro, comunque, si sono riscontrate delle difficoltà perché i testi proposti sono stati letti e affrontati superficialmente e talvolta, per la fretta, gli studenti hanno consegnato lavori non completi. Per stimolare l'attività in classe, la rielaborazione personale a casa e convincere gli alunni dell'importanza del lavoro svolto in compresenza sono state effettuate periodicamente delle prove di verifica sui temi trattati. Gli studenti, con il tempo, hanno acquisito confidenza con lo strumento di apprendimento proposto, migliorando l'impegno e l'attenzione. Al termine dell'anno scolastico la maggior parte degli studenti si è dimostrata soddisfatta del lavoro svolto e i docenti hanno constatato che alcuni alunni con difficoltà hanno migliorato il loro rendimento raggiungendo livelli sufficienti.

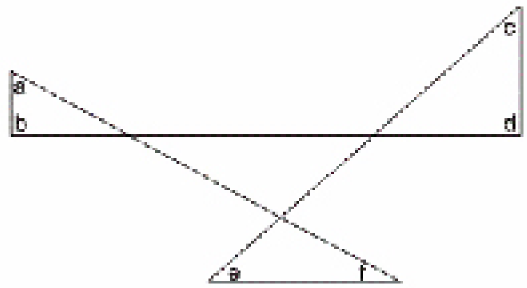
La prova INVALSI di matematica: il parere di un'insegnante

di Stefania Pozio

La prova nazionale INVALSI di matematica è un ottimo strumento sia per valutare gli studenti che per riflettere sul tipo di didattica che viene svolta nelle nostre scuole. Sarebbe necessario che tutti i docenti analizzassero il quadro teorico di riferimento che è alla base della prova per poter comprendere pienamente l'importanza di tale rilevazione.

La prova nazionale INVALSI di matematica del 2009, rivolta agli studenti della terza classe della scuola secondaria di primo grado era, a mio parere, strutturata molto bene perché comprendeva diversi quesiti che valutavano non solo conoscenze, ma anche competenze. Molte delle domande si riferivano ad argomenti che vengono svolti nell'arco dei tre anni di scuola media e non solo nell'ultimo anno, ed erano poste in modo tale da poter verificare contemporaneamente più di una conoscenza e se quel dato argomento era stato veramente compreso fino in fondo oppure no, oltre ad altre capacità come quella di osservazione o di saper ragionare in modo autonomo. Ad esempio, il seguente quesito sulla somma degli angoli interni di un triangolo era posto in modo tale da permettere di verificare da una parte se lo studente si ricordava che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e che gli angoli opposti al vertice sono uguali e dall'altra la capacità di osservazione.

D8. Qual è la somma degli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* nella figura disegnata qui sotto?



I quesiti sono stati impostati in modo tale che lo studente, per rispondere in modo corretto, non può soltanto richiamare alla mente una regola e applicarla in modo meccanico, ma deve utilizzare il ragionamento: si nota, infatti, una scarsa attenzione per i tecnicismi e un'attenzione, invece, agli aspetti concettuali. Il linguaggio è quasi sempre molto chiaro e senza ambiguità e i quesiti sono suddivisi secondo una certa gradualità nella difficoltà e comunque pochi erano i quesiti di elevata difficoltà rispetto a quelli affrontabili da tutti gli studenti.

Nessuno dei quesiti proposti era fuori luogo e tutti erano utili per misurare delle competenze necessarie per la vita di tutti i giorni, che si possono tranquillamente pretendere dai ragazzi di questa età. Un altro aspetto positivo è la presenza di alcune domande in cui viene richiesto di scrivere il procedimento seguito; infatti è necessario che i nostri studenti si abituino a questo tipo di richieste sempre presenti nelle prove internazionali di matematica come il PISA o il TIMSS, ma molto poco nei tradizionali compiti in classe.

Purtroppo a molti docenti questo tipo di prove non piacciono, forse per la paura di essere messi in discussione, oppure di essere giudicati, ma penso invece che siano molto utili per farci riflettere sul modo in cui la matematica viene insegnata nelle nostre scuole. Sicuramente uno dei problemi principali è la modalità di somministrazione della prova stessa. Il fatto che sia somministrata direttamente dall'insegnante di matematica della classe non dà garanzie di validità dei risultati in quanto, purtroppo, alcuni insegnanti sono portati a suggerire ai propri studenti le risposte corrette. Questo atteggiamento denota una scarsa fiducia nella valutazione di sistema, anche se in parte giustificata dalla sua recente introduzione e dai pregiudizi su una sua possibile utilizzazione per la valutazione dei docenti, ma anche una scarsa conoscenza del quadro teorico di riferimento (vedi rimando in calce) che è alla base di questa prova. Conoscere il quadro di riferimento è utile per avere una visione completa di tale rilevazione e per una comprensione delle idee chiave che guidano la progettazione delle prove per quanto riguarda sia la scelta degli argomenti oggetto della valutazione, sia le caratteristiche degli strumenti di valutazione, sia i criteri seguiti nella costruzione delle prove. Purtroppo sono pochi i docenti interessati ad approfondire i risultati, come se la prova fosse imposta dall'alto e non possa essere occasione di condivisione e di discussione per tutto il corpo docente.

Per approfondire:

• Il quadro teorico di riferimento per la matematica si può scaricare dal seguente indirizzo:

http://www.invalsi.it/snv0809/documenti/QdR_Matematica.pdf

Vivere, sperimentare, raccontare, riscoprire matematica

di Saverio Fanigliulo

Sono convinto che nella scuola del primo ciclo si deve puntare sulla qualità e non sulla quantità, sul piacere della scoperta e della soluzione di un problema, sulla motivazione e sul coinvolgimento attivo di tutti gli alunni.

Non so se avete notato, in questi ultimi anni si fa un gran parlare delle carenze che i giovani manifestano nella matematica, nelle scienze e nella lingua madre. L'Europa, l'Ansas, l'INVALSI, attraverso un'azione congiunta, progettano e attuano azioni, in ispecie nell'Italia meridionale e insulare, che sono finalizzate al superamento, almeno parziale, delle suddette criticità. Le nuove strategie educativo-didattiche e i contenuti proposti sollecitano il corpo insegnante a modificare il modo in cui vengono presentate e definite le unità di apprendimento relative alle discipline considerate.

Così, ad esempio, il progetto M@tabel, che si sta sperimentando nella scuola del primo ciclo, prevede percorsi educativo-didattici innovativi rispetto al solito modo di impostare la lezione di matematica. Le unità di apprendimento di matematica proposte ai professori-corsisti, da sperimentare nelle classi delle proprie scuole, sono veramente innovative nei contenuti e nei metodi con cui vengono presentate e definite.

Il laboratorio, il racconto, la storia, l'esperienza, il vissuto dei discenti, le situazioni problematiche, le nuove tecnologie, assumono un'importanza fondamentale nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica che prevede quattro ambiti: i numeri, lo spazio e le figure, la misura, i dati e le previsioni.

Per essere al passo dei tempi, e perseguire nel 2012 gli obiettivi di Lisbona, l'insegnante è chiamato ad aggiornare il suo profilo culturale e professionale onde trasmettere ai giovani di oggi quelle capacità e competenze richieste nella società attuale.

Modificare il personale metodo e stile di insegnamento non è cosa facile, in considerazione anche di un consolidato e obsoleto modo di procedere dei dipartimenti di matematica in cui si progettano le unità di apprendimento seguendo pari pari le indicazioni del "bravo" libro di testo in adozione.

Ormai dobbiamo farcene una ragione, la proposta educativo-didattica, affinché sia valida, deve avere senso e significato, prevedere contenuti reali o realistici, verifiche e valutazioni autentiche, mezzi e strumenti i più vari, i più consoni alle situazioni in cui si sperimentano i processi di apprendimento.

È necessario disporci con la mente rivolta al singolo alunno, per fare in modo che il progetto educativo messo in campo sia personalizzato, motivante, inclusivo, formativo in tutti i sensi.

Ho proposto ai miei ventisette alunni di prima media l'uda " Algoritmi insoliti", suggerita dal piano M@tabel, e devo dire che la scoperta di "vecchie" metodologie per effettuare le operazioni di moltiplicazione e divisione, con l'ausilio del laboratorio, del racconto, della storia, dei contesti significativi, ha entusiasmato, interessato e motivato tutti, persino coloro che ritenevano che la matematica fosse "difficile, inutile, faticosa".

Nella mia attività quotidiana di docente di matematica e scienze sento ancora colleghi che sono legati indissolubilmente al programma, hanno l'ansia di portarlo a termine, temono che i ragazzi possano evidenziare difficoltà nelle scuole superiori. Per questo i ragazzi vengono sovraccaricati di nozioni ed esercizi che sono recepiti solo da pochi eletti, mentre molti di essi fanno registrare disaffezione, disinteresse e noia per questa importante materia di studio.

Sono convinto che nella scuola del primo ciclo si deve puntare sulla qualità e non sulla quantità, sul piacere della scoperta e della soluzione di un problema, sulla motivazione e sul coinvolgimento attivo di tutti gli alunni. Per un ragazzo l'obiettivo più importante è quello di scoprire il piacere di fare matematica. Raggiunto questo obiettivo, i docenti possono pensare di raggiungere tutti gli altri.

Penso che le proposte di aggiornamento – es. M@tabel – potranno rivelarsi utili ed efficaci solo in presenza di una piena disponibilità e coinvolgimento del personale docente.

Lo sviluppo dell'intuizione ragionevole

di Simona Barbetti

Si può lavorare sulle scienze nella scuola dell'infanzia? A quanto pare sì, a giudicare da quanto fatto a Scandicci, in provincia di Firenze.

La scienza dei bambini non è e non può essere quella che, a volte, imparano gli adulti. Tuttavia è concepibile che essi riconoscano una certa struttura razionale nella realtà che li circonda e nei fenomeni che in essa si manifestano. Abbiamo perciò deciso, con l'aiuto di alcuni consulenti (Carlo Bernardini e Riccardo Luccio) invitati dal Comune di Scandicci, di promuovere la naturale curiosità dei nostri piccoli allievi mediante esperienze semplici ma appassionanti adatte a coinvolgere la loro attenzione.

L'intesa era che l'intervento delle maestre fosse limitato più alle sollecitazioni che alle spiegazioni: in tal modo i bambini avrebbero avuto occasioni sia di esprimersi sia di escogitare semplici elementi grafici per annotare idee e risultati. Questo ha reso indispensabile un approfondimento del linguaggio, proprio nel senso che è stato chiarito dalla proposta della "protomatematica" di Bruno D'Amore.

Abbiamo privilegiato esperienze che seguissero i criteri fissati per garantire un minimo di scientificità alle attività che si andavano facendo e che sono state raggruppate in cinque categorie.

1) Esperienze che contengono aspetti da socializzare e che richiedono quindi una simbolizzazione dei dati.

2) Esperienze concrete che contengono aspetti di astrazione e generalizzazione come per esempio la velocità.

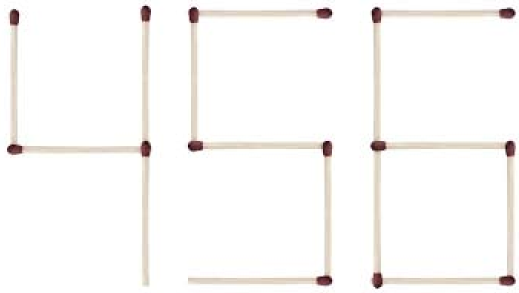
3) Attività in cui i bambini si abituano a riconoscere le variabili sostanziali di un fenomeno da quelle ininfluenti.

4) Attività in cui si riflette su esperienze comuni che, riproposte schematicamente, si consolidano attraverso una lettura più corretta.

5) Esperienze che abituano i bambini a riconoscere il rapporto di causa/effetto mettendo i fenomeni in relazione tra loro, a ordinare semplici situazioni in sequenze logiche che consentano di fare previsioni.

I bambini, come abbiamo potuto costatare, hanno migliorato la capacità di fare domande concrete, di dare risposte con una logica riconoscibile, di usare un linguaggio razionale più preciso del linguaggio comune, di consolidare conoscenze acquisite per esperienza. Per quanto riguarda i compiti delle insegnanti, è stato importante adottare l'abitudine di programmare collegialmente e registrare le attività, badando all'opportunità che tutti i bambini fossero coinvolti e interagissero fra loro, lavorando in situazione di piccolo gruppo. C'è stato inoltre uno sforzo da parte delle insegnanti per dotare i bambini di strumenti idonei alle varie fasce di età, in modo da permettere loro di manifestare il proprio pensiero, di esprimere attraverso un elaborato il tipo di logica utilizzato. L'attività ha dato materiale a numerose pubblicazioni e a convegni; di tutto ciò resta traccia che può rappresentare, con qualche completezza, i numerosi particolari.

Fiammiferi e cifre decimali
di Domenico Lenzi e Cosimo De Mitri



Un breve excursus storico sulla scrittura dei numeri per un avvio naturale alla notazione delle cifre decimali. A pagina 54 il saggio completo.

In questo articolo, dopo una carrellata storica sulla scrittura dei numeri in diverse civiltà, si riprende una proposta fatta in Domenico Lenzi, "Su alcune difficoltà mnemoniche legate ai primi approcci all'aritmetica". Periodico di Matematiche, Vol. 9, N. 3 (2009), sui primi approcci alla scrittura delle cifre decimali, approfondendo il discorso e fornendo un ulteriore contributo che riteniamo possa risultare utile.

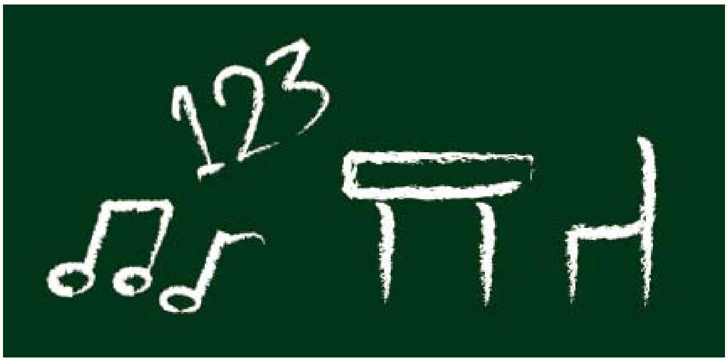
L'impostazione che si presenta vuol essere un percorso complementare, e non certo alternativo, rispetto ad altre attività didattiche finalizzate allo stesso scopo. Qui, come in op. cit., per avviare in modo naturale i bambini alla scrittura delle cifre decimali da 1 a 9 – alleviando così alcune delle difficoltà mnemoniche, spesso deleterie, connesse con i primi apprendimenti matematici – usiamo per ogni cifra da rappresentare una quantità di fiammiferi corrispondente a essa, e disponiamo i fiammiferi in modo tale da formare una figura che ricordi la scrittura usuale della cifra stessa. Quindi per il passaggio alla scrittura standard sarà sufficiente una semplice de-formazione della scrittura proposta qui, una volta che quest'ultima sia stata fatta propria dall'alunno. Inoltre, affinché l'allievo abbia una percezione immediata dei raggruppamenti costituiti da quattro o da cinque fiammiferi – dopo averne preso coscienza attraverso il conteggio – usiamo per essi rispettivamente i colori azzurro e rosso (senza alcun riferimento all'uso dei numeri in colore di Georges Cuisenaire).

Nell'attività proposta il colore svolge un importante ruolo evocativo: quando viene usato l'azzurro o il rosso, il bambino saprà di trovarsi di fronte a quattro o a cinque fiammiferi, senza avere la necessità di contarli. Così come, di fronte a un certo tipo di banconota grigia, un adulto capisce che si tratta di cinque euro, senza dover leggere il numero e senza che sulla carta-moneta siano raffigurate cinque monete da un euro.

È chiaro che il colore rosso servirà anche per rappresentare cinque fiammiferi in tutte le cifre da 6 a 9. Ovviamente, nel nove compariranno anche quattro fiammiferi azzurri. Di ciò daremo esempio in una tavola riportata in ultima pagina.

Perché si comprenda fino in fondo il senso della nostra proposta, giova tener presente che per gli scolari il problema di memorizzare la notazione delle cifre numeriche si presenta insieme a quello di memorizzare i vari modi di rappresentare le lettere dell'alfabeto; onde alcune forme di dislessia, disgrafia e discalculia potrebbero dipendere, oppure essere accentuate, da difficoltà di carattere mnemonico. Perciò siamo convinti che una semplificazione della scrittura delle cifre numeriche potrà rivelarsi utile.

>>> **A pagina 54 il saggio completo.**



Primi passi in aritmetica
di Domenico Lenzi

Una proposta di intervento nell'ambito dei primi approcci all'aritmetica per bambini dai tre ai cinque anni. **A pagina 62 il saggio completo.**

La barriera di Jean Piaget. Negli anni '30 del secolo scorso lo psicologo svizzero Jean Piaget, coadiuvato dalla sua allieva Alina Szeminska, svolse degli studi fondamentali sulla conservazione delle quantità. Egli evidenziò che prima dei cinque o sei anni si può essere indotti a dire che il liquido contenuto in una bottiglia cambia di quantità se esso viene travasato in una bottiglia più stretta (in cui il liquido raggiunge un livello più alto) o in più bicchieri. Facendo perciò dipendere la quantità di una sostanza continua dalla sua dislocazione spaziale. Lo stesso inconveniente fu evidenziato rispetto a quantità discrete.

Secondo l'eminente studioso svizzero, l'acquisizione del concetto di conservazione delle quantità avviene attraverso tre stadi fondamentali, che possiamo riscontrare sia per le quantità continue che per quelle discrete. Il terzo stadio è quello in cui il concetto di conservazione diventa stabile. Rinviando alla lettura de "La genesi del numero nel bambino" (1968) per gli opportuni approfondimenti, qui diamo una fugace idea di quanto è emerso dagli studi del Piaget in merito alla conservazione delle quantità discrete, presentando alcuni esempi significativi riguardanti le sue esperienze in riferimento ai primi due stadi.

Primo stadio. Questo stadio va dai quattro anni ai quattro e mezzo/cinque. In esso la coincidenza numerica tra due aggregati di oggetti – attraverso la corrispondenza a uno a uno – viene percepita solo quando essa si evidenzia col concorso determinante dell'operatore-insegnante. Il fanciullo non è in grado di costruirla da solo; e quando la corrispondenza viene a mancare sul piano concreto – pur senza sottrazione o aggiunta di elementi nei due aggregati confrontati – essa sembra scomparire dalla mente del bambino, che viene distratto dalla dislocazione spaziale degli oggetti. Ecco un esempio relativo al primo stadio (pag. 73) da cui sono stati tratti i dialoghi. In questo esempio e negli altri riferiti al secondo stadio, all'inizio si riporta il nome abbreviato del bambino, seguito dall'anno e dal mese della sua età, posti tra parentesi.

"Fra (4; 3): «Prendi le uova necessarie per i porta-uovo, né di più né di meno, un uovo per ogni porta-uovo». (Il fanciullo costituisce una fila di uova che ha la stessa lunghezza di quella dei porta-uovo, pur essendo più numerosa.) «Le uova e i porta-uovo sono lo stesso? » «Sì» «Allora metti le uova per vedere se è giusto ». (Il bambino esegue.) «Era lo stesso?» «No» (Si mettono via le uova superflue) «E adesso?» «Si» (Quindi si tolgono le uova dai porta-uovo, ammucchiandole davanti a quelli.) «E adesso è lo stesso?» «No» «Perché?» «Ci sono più portauovo» …".

Secondo stadio. Questo stadio, che subentra al precedente, dura fin verso i sei anni. Esso è caratterizzato dal fatto che il bambino determina da solo la corrispondenza a uno a uno, ma anche lui perde coscienza della coincidenza numerica quando la corrispondenza viene fatta sparire concretamente, come nel primo stadio.

"Dum (5; 8), pag. 75: (Lui stesso fa corrispondere 6 uova a sei porta-uovo, quindi pone ciascun uovo su ciascun porta-uovo. Poi le uova vengono tolte e poste lontane tra loro.) «Sono lo stesso le uova e i porta-uovo? » «No» … «Se si vuole rimettere un uovo in ogni porta-uovo, va bene ancora? » «Sì … Non lo so»".

Ed ecco un esempio preso da pag. 77. Esso ci mostra un bambino che è ormai prossimo al terzo stadio, che però non ha ancora pienamente raggiunto in quanto subentra ancora qualche fugace incertezza quando la dislocazione spaziale degli oggetti sembra poter alterare due quantità che il bambino ha realizzato con una corrispondenza a uno a uno.

"Os (5; 10): (Conta un numero di uova eguale a quello dei porta-uovo in cui quelle vengono deposte. Poi le uova vengono tolte e disposte riunite davanti ai porta-uovo. Però Os non si confonde come Dum.) «È lo stesso?» «Si». (Poi le uova si distanziano tra loro.) «È lo stesso?» «No». «Dove ce n'è di più?» «Sono di più le uova». «Tutte le uova possono essere messe nei porta-uovo?» «Si»".

Terzo stadio. Questo stadio subentra al secondo e compare intorno ai sei anni. Esso è caratterizzato dal fatto che il bambino determina da solo la corrispondenza a uno a uno, ma non perde coscienza della coincidenza numerica quando la corrispondenza viene fatta sparire concretamente.

Cantare e contare! L'ultimo esempio presentato nel precedente paragrafo è particolarmente illuminante. Infatti Os (5; 10) – pur essendo cosciente del fatto che le uova distanziate egli riuscirà a rimetterle nei porta-uovo, realizzando nuovamente la corrispondenza a uno a uno che è stata provvisoriamente eliminata – continua a pensare che sia da prendere in considerazione anche un confronto quantitativo riferito alla dislocazione degli oggetti. Rivelando, perciò, un difetto di comprensione che è dovuto a una carenza di comunicazione: semplicemente, nessuno gli ha detto ancora come stanno le cose!

È chiaro che, finché gli inconvenienti riscontrati dal Piaget non vengono superati, è privo di senso parlare di aritmetica. Ma come porvi rimedio? Certamente il piccolo Os non si sarebbe confuso se gli avessero detto, cosa che egli era perfettamente in grado di capire, che – in relazione a confronti riguardanti la numerosità di aggregati diversi – nell'uso di termini quali più e meno si prescinde da come i vari oggetti siano dislocati. In definitiva, l'unico criterio di valutazione è quello dato dal conteggio degli oggetti dei due aggregati. Perciò, se nei due conteggi si arriva a un medesimo numero finale, allora si dice che i due aggregati hanno lo stesso numero di oggetti [elementi]. Altrimenti si dice che ha meno oggetti l'aggregato per i cui elementi il conteggio arriva fino a un numero che viene prima del numero a cui si perviene contando gli elementi dell'altro; onde per quest'altro si dirà che esso ha più oggetti del primo.

Sottolineiamo che l'accettazione di quanto espresso poc'anzi rientra in un quadro, in un universo che è compreso dai bambini, che si rendono conto del fatto che la gran parte dei modi di dire e frutto di convenzioni e di accordi. Questi potranno non piacere, ma non si può prescindere da essi. Diversamente, si correrebbe il rischio di andare incontro a inconvenienti seri, così come non rispettare la convenzione che vieta di attraversare una strada col semaforo rosso – un colore molto apprezzato dalla maggior parte dei bimbi – può determinare conseguenze molto gravi.

Alla presa di coscienza della convenzione del contare si può arrivare a poco a poco, con un percorso da intraprendere già a tre anni. Si potrà incominciare col ritornello un-due-tre – eventualmente associato al zum-pa-pa: un-due-tre zum-pa-pa. Con l'un-due-tre inizieranno i primi piccoli conteggi e i primi confronti numerici. Poi, una volta che sarà stato memorizzato l'un-due-tre, e sarà stato correttamente acquisito il significato del confronto numerico in relazione a quantità che non superano il tre – che il bambino a un certo punto sarà in grado di effettuare anche con un semplice colpo d'occhio – si passerà all'un-due-tre-qua-cin, che sarà opportuno sottolineare con una facile arietta musicale.

Ora siamo intorno ai quattro anni e il bambino è in grado di capire che qua e cin sono rispettivamente abbreviazioni di quattro e cinque. Sono parole che, data l'età, probabilmente egli già conosce; altrimenti, l'attività da svolgere in classe, in prosecuzione e in analogia con quella relativa all'un-due-tre già svolta, gli consentirà di memorizzare anche queste altre due paroline, mentre il motivetto musicale che sottolinea l'un-due-tre-qua-cin l'aiuterà a mantenerle tutt'e cinque in quello che è il loro ordine naturale.

Sottolineiamo che l'insegnante non dovrà mai stancarsi di ricordare di tanto in tanto che è solo ed esclusivamente la cantilena un-due-tre-qua-cin, usata come di dovere, che permette di effettuare i confronti numerici. Una volta che il bambino avrà acquisito ciò, si potrà provare a svolgere – in questo universo numerico un po' più ampio – le prime addizioni, usando palline che in un primo momento saranno distribuite in due cestini distinti, per un totale che – naturalmente – non dovrà superare il cinque; dopodiché le palline di un cestino saranno riversate nell'altro, ottenendo così un numero complessivo di palline che rappresenta la somma dei numeri di palline precedentemente contenute in cestini diversi.

Presto all'un-due-tre-qua-cin potrà seguire il sei-sett-o-no-die. Avremo perciò altre cinque paroline; cioè, cinque abbreviazioni per le quali è superfluo ripetere quanto è stato già detto per qua e cin.

Ora un-due-tre-qua-cin e sei-sett-o-no-die potranno essere inserite in un'arietta vera e propria, il cui scopo è già stato tratteggiato precedentemente in riferimento a un-due-tre-qua-cin.

Per approfondire:

• J. Piaget, A. Szeminska, "La genesi del numero nel bambino", La Nuova Italia 1968.

>>> **A pagina 62 il saggio completo.**

I ponti di Königsberg e la nascita della teoria dei grafi
di Domenico Lenzi

Lo stato di degrado in cui versa l'apprendimento della matematica è sotto gli occhi di tutti, è quindi essenziale riesaminare le tematiche proposte ai nostri ragazzi, anche recuperando alcuni argomenti di un tempo, troppo precipitosamente cancellati dall'insegnamento.
A pagina 71 il saggio completo.

Negli anni '70 una ventata di rinnovamento investì l'insegnamento della matematica. Molti ricorderanno gli entusiasmi che la teoria degli insiemi, la cosiddetta insiemistica, riuscì ad accendere allora. Purtroppo, un suo uso improvvido in chiave didattica fece sì che tutto finisse in una bolla di sapone. E questa importante disciplina fu di fatto bandita dall'insegnamento. Però lo stato di degrado in cui ora versa l'apprendimento della matematica è sotto gli occhi di tutti. È quindi essenziale riesaminare le tematiche proposte ai nostri ragazzi, anche recuperando alcuni argomenti di un tempo, troppo precipitosamente cancellati dall'insegnamento; avendo come primario obiettivo quello di educare alla razionalità. Altrimenti, come Umberto Eco ebbe a scrivere alcuni anni fa sul Corriere della Sera, il prossimo stadio verso cui l'umanità si evolverà sarà quello dell' Homo stupidus stupidus.

Tra i temi da presentare agli studenti, quello della teoria dei grafi ha una notevole importanza, sia da un punto di vista applicativo, sia dal punto di vista dell'avvio al ragionamento matematico. Qui di seguito illustreremo quelli che furono i primi passi nell'ambito di questa disciplina, nonché una proposta di semplificazione – in cui si fa uso del gioco del domino – per la discussione del classico problema sulla percorribilità dei ponti di Königsberg, che Eulero dimostrò essere irrisolubile.

Però la facile dimostrazione di Eulero ha per un non matematico il "difetto" di essere condotta in termini non sufficientemente concreti. Ed è per questo che a Königsberg pare che ci siano ancora delle persone che, non del tutto convinte del risultato di Eulero, cercano di fare quel percorso impossibile. Il che è un indice preoccupante del fatto che anche gli aspetti più elementari della matematica spesso hanno difficoltà a diventare patrimonio comune, non solo in Italia.

Agli inizi del 18° secolo gli abitanti di Königsberg (l'odierna Kaliningrad, situata nella Prussia del nord, presso il mar Baltico) avevano un problema semplice da enunciare, che però non riuscivano a risolvere. La citta è attraversata dal fiume Pregel e sorge in parte su due isole, oltre le quali il fiume si getta in mare. A quei tempi le due isole e le altre sponde del fiume erano collegate con sette ponti, come si può rilevare dallo schizzo di Fig. 1 (è lo stesso che Eulero presentò nell'articolo da lui dedicato al problema). Ebbene, gli abitanti di Königsberg si domandavano se fosse possibile compiere un cammino (cioè, una passeggiata) lungo quei ponti in modo tale da percorrerli una volta soltanto (cammino semplice) senza tralasciarne alcuno. Eulero, introducendo la teoria dei grafi, provò che il quesito aveva risposta negativa, dando una condizione necessaria di risolubilità per problemi di quel tipo, che nel caso di Königsberg non è soddisfatta.

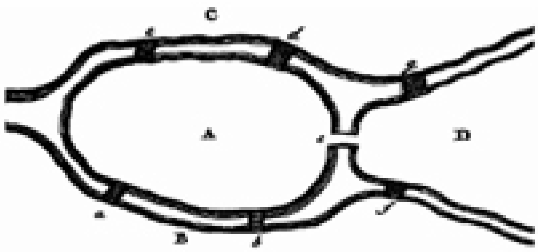


Fig. 1

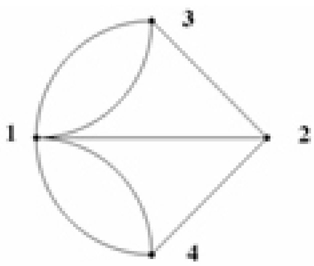


Fig. 2

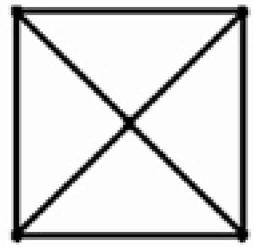


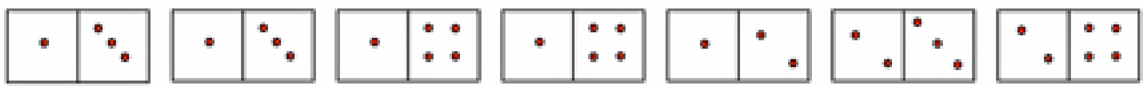
Fig. 3

Eulero risolse il problema rappresentando le quattro zone della città su cui arrivavano i sette ponti con dei punti chiamati nodi (o vertici); si veda Fig. 2, dove i quattro nodi sono denotati con i numeri 1, 2, 3, 4. Inoltre ciascun ponte fu rappresentato da una linea (chiamata lato, o spigolo) che congiungeva i due nodi che denotavano le due zone collegate dal ponte considerato. Schemi di questo tipo prendono il nome di grafi. Il numero di lati che terminano su di un nodo e detto grado di quel nodo. Ai grafi si trasferiscono immediatamente le nozioni di "cammino" e di "cammino semplice", intesi come percorsi lungo gli spigoli, da affrontare l'uno dopo l'altro senza "salti"; cioè, nel caso di una rappresentazione grafica, da percorrere con un solo tratto di penna. Perciò il problema di Königsberg si traduce in quello di effettuare un cammino semplice lungo tutti i lati del grafo di Fig. 2.

Ebbene, Eulero dimostrò che quel cammino non si può effettuare qualora un grafo abbia più di due nodi di grado dispari (impedimento di Eulero), come nel caso di Königsberg. Perciò quel cammino non si può effettuare nemmeno nel caso del grafo di fig. 3 – ben noto agli appassionati di quiz – dato che esso ha il solo nodo centrale di grado pari, mentre gli altri quattro hanno tutti grado 3.

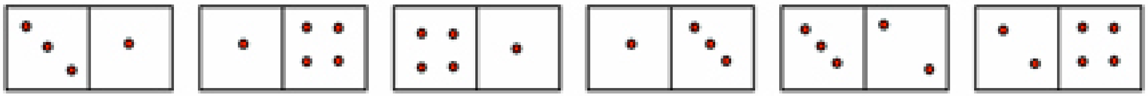
Usando il gioco del domino è facile vedere che la famosa passeggiata di Königsberg non si può fare. In un secondo momento lo stesso tipo di impostazione si può usare per discutere il caso generale.

Osservando Fig. 2, ci si rende conto che gli spigoli – e quindi i sette ponti della città – si possono rappresentare con le seguenti tessere del gioco del domino; ad esempio, la prima tessera rappresenta uno dei due spigoli che congiungono il nodo 1 col nodo 3.



Ricordiamo che un allineamento di quelle tessere, fatto rispettando la regola del domino, richiede che due di queste possano essere consecutive solo quando un numero dell'una è accostato allo stesso numero presente sull'altra. Perciò un numero presente soltanto all'interno dell'allineamento ha sempre delle presenze che sono in numero pari (naturalmente una delle tessere che allineiamo può essere capovolta rispetto alla presentazione precedente (come, ad esempio, la prima tessera qui sotto).

Nell'allineamento sottostante il numero 1 (espresso da un puntino) ha due coppie di presenze, mentre il 2 (espresso da due puntini) ha una coppia di presenze. Invece i numeri 3 e 4, che hanno ciascuno una presenza anche in un estremo dell'allineamento, hanno un numero dispari di presenze.



Notiamo che a ogni cammino lungo gli spigoli del grafo di Fig. 2 possiamo far corrispondere un allineamento delle tessere del domino che rispetti le regole di quel gioco. Ad esempio, l'allineamento presentato poc'anzi esprime proprio il cammino costituito dallo spigolo che va dal nodo 3 al nodo 1, seguito da quello che va dal nodo 1 al nodo 4, che a sua volta è seguito dallo spigolo che va dal nodo 4 al nodo 1, e così via.

Ora supponiamo, per assurdo, che il famoso cammino a Königsberg si possa fare, onde a esso corrisponde un allineamento delle sette tessere. Ebbene, in quell'allineamento almeno due numeri sono presenti soltanto all'interno dell'allineamento (agli estremi sono disponibili solo due posti!). Fissiamo l'attenzione su uno di questi numeri e chiamiamolo a.

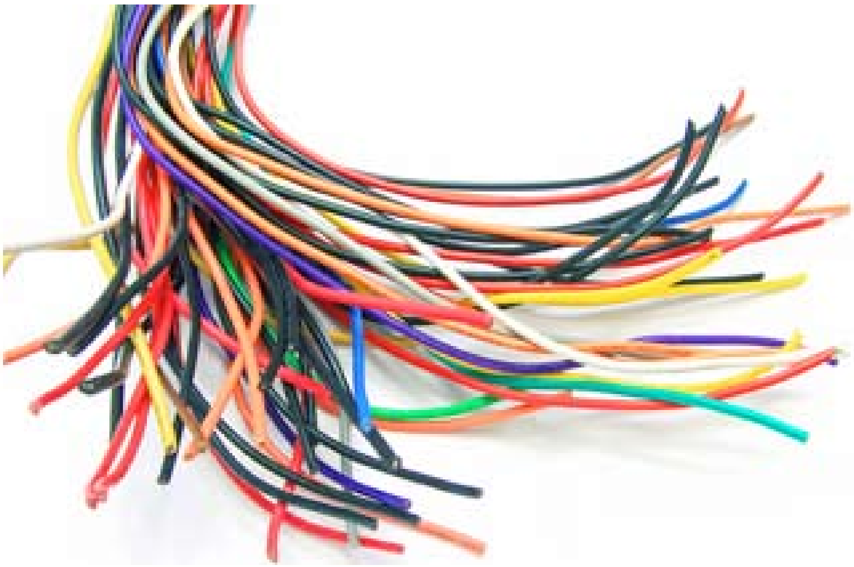
Per quanto è stato già detto, a nell'allineamento ha un numero pari di presenze. Nello stesso tempo a è presente tante volte quante sono le tessere in cui esso figura (ricordiamo che c'è una tessera per ogni spigolo); cioè, tante volte quanti sono gli spigoli che toccano a. E questi sono in numero dispari, dato che ogni nodo del grafo di Fig. 2 ha grado dispari. Il che è assurdo. Perciò il cammino non si può fare.

Fine del problema!

Nota Bene. Con un po' di attenzione si vede che il discorso si può ripetere per un qualsiasi grafo che abbia più di due nodi di grado dispari. Infatti – avendo indicato ciascun nodo con un numero e traducendo il problema in termini di gioco del domino – poiché i nodi di grado dispari sono più di due e le posizioni agli estremi sono soltanto due, uno di questi nodi sarà rappresentato da un numero che nell'ipotetico allineamento di tessere può essere presente solo all'interno di un allineamento, quindi un numero pari di volte. Ciò – come per Königsberg – è in contrasto col fatto che quel nodo abbia grado dispari.

Viceversa, si può provare che, dato un grafo quasi-connesso (cioè, che si presenti come un blocco unico, a parte l'eventuale presenza di nodi su cui non arrivino spigoli: nodi di grado 0. In termini più precisi ciò vuol dire che, dati due nodi distinti e di grado diverso da 0, onde su di essi arriva uno spigolo, c'è un cammino che li collega. Un grafo quasi-connesso che sia privo di nodi di grado 0 è detto connesso.), se l'impedimento di Eulero non c'è, allora il cammino semi-euleriano esiste sempre; inoltre, si può darne una costruzione. Però questo è un po' più complicato da vedere; perciò lo riserviamo a un'esposizione più estesa dell'argomento.

>>> **A pagina 71 il saggio completo.**



Alla ricerca di una legge scientifica: esperienza di un percorso didattico
di Leonardo Barsantini

Un percorso su resistività degli isolanti e dei conduttori per scoprire la proporzionalità diretta e inversa. **A pagina 77 il saggio completo.**

Il percorso, al confine fra l'ambito tecnologico e quello scientifico, cerca di far superare lo stereotipo della divisione in classi dei materiali. Comprendere, relativamente alle proprietà elettriche, che i materiali si possono suddividere in isolanti e conduttori, è sicuramente importante ed è il primo passo da fare, ma questa classificazione deve prevedere un'ulteriore raffinazione che va al di là di questa prima approssimazione. La definizione di classi di tipicità, infatti, ci permette di classificare gli oggetti e i fenomeni all'interno di ambiti omogenei, ma fa anche correre il rischio che queste classi si trasformino in stereotipi della mente che non servono a chiarire le idee, ma a intrappolarle.

Successivamente a una prima fase di indagine sui conduttori e gli isolanti è necessario far comprendere che questa distinzione così netta, in realtà è molto più sfumata, e si passa con continuità da un estremo all'altro. Per far questo è necessario introdurre un "indice" che caratterizza la capacità di far scorrere corrente elettrica in un dato materiale, al quale imponiamo il nome di resistenza, unificando conduttori e isolanti.

Il percorso è pensato per gli studenti del biennio della scuola superiore sia in ambito fisico che in quello tecnologico, rivolgendosi direttamente a loro con indicazioni operative. La mediazione del docente è, ovviamente, indispensabile per comprendere in quale momento del percorso didattico può essere inserito, quali conoscenze richiede, per fornire necessarie indicazioni e chiarimenti e soprattutto, per frazionare il materiale in più tappe. Come tutti i percorsi di lavoro anche questo contiene indicazioni che possono e devono essere adattate alle specifiche esigenze. Il lavoro si articola attraverso le misurazioni di resistenza di fili di un dato materiale misurate con l'ohmmetro. Gli studenti possono non conoscere lo strumento ma la comprensione di come opera è alla loro portata se si sono fatti riflettere sullo studio dei primi fenomeni elettrici e sulle cariche in movimento. Non interessa sapere cosa c'è dentro l'ohmmetro, ma che questo misura le cariche in movimento in un certo materiale spinte a muoversi da una pila presente al suo interno. Nel percorso si introduce, oltre alla resistenza, anche la resistività come indice "intensivo" che caratterizza la capacità di favorire il passaggio delle cariche elettriche. Lo studio della resistività approfondisce il concetto di grandezza intensiva e, a tal proposito, si può vedere un parallelo con il peso specifico.

Il lavoro proposto prende lo spunto dallo studio di proprietà elettriche, ma contiene anche altri aspetti, infatti, i dati misurati, peraltro molto semplicemente, permettono di ricostruire una legge riflettendo sulla proporzionalità diretta e inversa, favorendo così una trasversalità con la matematica in un caso concreto. Gli elementi in gioco sono le misure, le tabelle, i grafici, l'eventuale analisi con Excel in un ambito che richiede la capacità di interpretare semplici schemi elettrici o indicazioni per le misurazioni. Da un certo punto di vista il percorso può essere considerato come una occasione di lavoro sulla proporzionalità diretta e inversa. La parte finale, un breve approfondimento, rende conto di alcuni risultati alla luce di un'interpretazione più fisica dei fenomeni, indagando le cause più profonde di certi comportamenti.

>>> **A pagina 77 il saggio completo.**

Tiratori di funi
di Saverio Fanigliulo

La geometria "delle linee e dei cerchi", che risale agli antichi agrimensori, gli arpedonapti – tiratori di funi –, deve essere presentata agli alunni come una materia di studio pratica, in cui il racconto, il disegno, la misura, la costruzione, l'uso ordinario delle squadre, del compasso e del goniometro, diventano essenziali nel processo di insegnamento-apprendimento di questa materia.

Quando si entra in classe si avverte quel clima di distacco che molti discenti manifestano nei confronti della geometria, dell'aritmetica e dell'algebra. Durante la mia esperienza come docente di matematica e scienze nella scuola secondaria di primo grado ho avuto modo di conoscere numerosi ragazzi veramente intelligenti che esprimevano però un grande disagio quando venivano posti dinanzi a un problema di geometria o dovevano calcolare il valore di una espressione algebrica.

Molti di loro, nonostante le debolezze evidenziate in matematica, si sono affermati nei vari settori del sociale e della produzione, alcuni sono professionisti, altri bravi artigiani e abili commercianti.

Quando si discute con gli ex alunni, ormai persone adulte, del problema "matematica a scuola", molti concordano sul fatto che lo studio della matematica, pur essendo utile nelle questioni pratiche e nella vita di tutti i giorni, risultava poco attraente, noioso e difficile.

Del resto è un fatto che i ragazzi, in uscita dalle scuole superiori, prediligono corsi di studio in cui la matematica non c'è oppure è poco rappresentata.

A onor del vero bisogna dire che ci sono alcuni ragazzi che trovano interessante questa importante materia di studio, distinguendosi nel calcolo e, un po' meno, nella risoluzione dei problemi geometrici.

Per quanto premesso, il vero problema è quello di rendere più interessante, accattivante e piacevole la matematica, attraverso un nuovo modo di presentare e definire gli argomenti di studio.

Cominciamo con il dire, per esempio, che in prima media i libri di testo di geometria si occupano in larga parte degli enti geometrici fondamentali (il punto, la linea, il piano) che i ragazzi percepiscono come entità astratte, lontane dalla loro esperienza e conoscenza diretta.

Gli insegnanti più avveduti, pur facendo riferimento al libro di testo, è bene che introducano la geometria attraverso l'osservazione della realtà vicina alle esperienze dirette dei ragazzi. Lo studio dello spazio tridimensionale, degli oggetti e delle costruzioni che fanno parte dell'ambiente circostante, deve, quindi, precedere lo studio di entità geometriche simboliche e astratte.

La geometria "delle linee e dei cerchi", che risale agli antichi agrimensori, gli arpedonapti – tiratori di funi –, deve essere presentata agli alunni come una materia di studio pratica, in cui il racconto, il disegno, la misura, la costruzione, l'uso ordinario delle squadre, del compasso e del goniometro, diventano essenziali nel processo di insegnamento-apprendimento di questa materia.

Gli insegnanti facciano in modo che non succeda più che lo studio della geometria a scuola prescinda dall'uso sistematico delle squadre e del compasso e di altri strumenti utili – Geo Gebra, Cabri – per esplorare contesti geometrici significativi.

L'altro giorno, durante l'ora di geometria, i miei alunni, divisi in piccoli gruppi, mi hanno confermato, indirettamente, il loro grande interesse per la geometria: tutti hanno disegnato quadrati, triangoli rettangoli e pentagoni, ritagliandoli dai quadrati, esagoni, usando squadre e compasso, costruendo dal vero un solido sconosciuto, uno "sgorbio" a base esagonale, con facce pentagonali e triangolari. Tutti gli alunni si sono meravigliati, si guardavano increduli, non riuscivano a spiegarsi.

Senza parole, con un gesto, sono stati appaiati, per la base esagonale, due "sgorbi"costruiti nei gruppi, come per magia, i due solidi misteriosi, uniti fra loro, hanno assunto una forma geometrica elegante nota a tutti i ragazzi, il cubo, con una sezione esagonale che toccava con i vertici i punti medi di due spigoli di ogni faccia.

È stata un'ora indimenticabile, magica, i ragazzi mi cercavano per parlarne, per chiedermi alcune particolari proprietà del solido costruito. Tutti gli alunni, nessuno escluso, hanno partecipato all'attività, lavorando nella ricostruzione dell'oggetto misterioso anche a casa. Ci siamo dati appuntamento alla prossima unità oraria per rivivere insieme altri momenti magici!

Riporto qui di seguito l'esperienza vissuta in classe ripresa dalla piattaforma M@t.Abel.

***

Prendete 3 quadrati col lato di 10 cm, tagliateli lungo la linea HK in modo da ottenere 3 triangoli e 3 pentagoni (fig. 1). Disegnate un esagono regolare con i lati lunghi come HK e unite i triangoli e i pentagoni ai lati dell'esagono alternandoli. Provate a chiudere la figura come fosse uno sviluppo. Che tipo di solido avete realizzato? Somiglia a qualche solido che conoscete? Sapete calcolare il volume di questo solido?

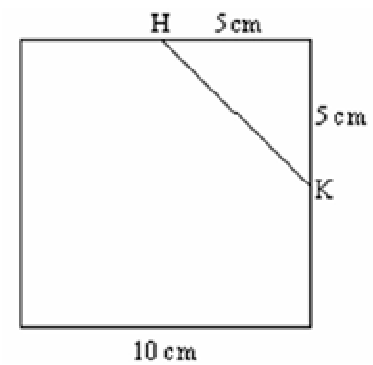


Figura 1

L'insegnante guida gli alunni nella costruzione, che deve essere fatta a piccoli gruppi in modo da avere alla fine più solidi uguali. Terminata la parte operativa, si comincia a descrivere il solido cercando congruenze tra facce e spigoli e somiglianze con altri solidi conosciuti.

Se i ragazzi non lo faranno spontaneamente, l'insegnante a un certo punto chiederà di avvicinare due di questi solidi misteriosi, in modo da far combaciare i due esagoni: si otterrà un cubo. Poco per volta, guidati dall'insegnante, scopriranno che le caratteristiche dello sviluppo disegnato all'inizio corrispondono a quelle che si ritrovano nella sezione: un esagono ottenuto tagliando il cubo per i punti medi di due spigoli di ogni faccia (fig. 2).

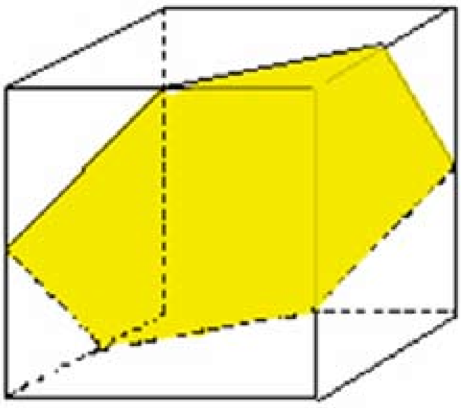
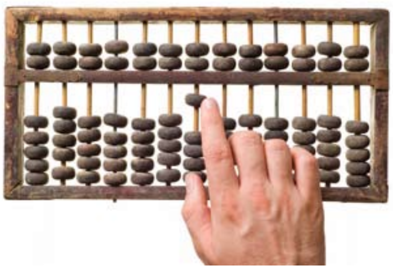


Figura 2

La matematica si può toccare? Macchine provenienti dalla storia

di Francesca Martignone



Il Progetto MMLab-ER ha creato una rete di laboratori di matematica come risorsa didattica per gli insegnanti di scuola primaria e secondaria dell'Emilia Romagna.

Il Progetto regionale "Macchine Matematiche per l'Emilia-Romagna" (MMLab-ER) è stato finanziato nel biennio 2008/10 dalla regione come Azione 1 del progetto Scienze e Tecnologie per l'Emilia Romagna. Il coordinamento scientifico del Progetto è stato affidato al Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia (Maria G. Bartolini Bussi e Michela Maschietto). L'autrice di questo contributo e Rossella Garuti sono state responsabili della preparazione del materiale e dello svolgimento della formazione dei docenti, seguita dalla realizzazione delle sperimentazioni nelle scuole.

Questo Progetto ha consentito la costruzione di una rete di laboratori di matematica in cinque province dell'Emilia Romagna (Bologna, Modena, Piacenza, Ravenna e Rimini) presso Centri di Documentazione Educativa e, soprattutto, la formazione di gruppi di insegnanti in servizio di scuola primaria e secondaria sulla didattica laboratoriale e sulle potenzialità didattiche di particolari strumenti: le macchine matematiche. Questi oggetti, ricostruzioni di strumenti appartenenti alla fenomenologia storica della matematica e concretamente manipolabili, sono di due tipi: 1) macchine per l'aritmetica, come semplici calcolatrici meccaniche e abaci, e 2) macchine per la geometria, come compassi, pantografi per le trasformazioni geometriche del piano, conicografi etc. (Laboratorio delle Macchine di Modena).

Gli incontri svolti per la formazione sono stati un'occasione importante per favorire il confronto e la discussione tra insegnanti di diversi ordini di scuola che hanno condiviso idee, linee guida dei percorsi didattici e riflessioni sul ruolo dell'insegnante e sui diversi aspetti culturali e di contenuto che possono emergere dalle esperienze laboratoriali con le macchine matematiche.

Le sperimentazioni sono state progettate e realizzate avendo in comune le stesse basi, costruite durante la formazione, legate alla didattica laboratoriale e all'attenzione verso i processi (di interazione tra pari, con esperti e con gli strumenti, esplorativi e argomentativi etc.). Sono state inoltre utilizzate le stesse macchine, naturalmente con obiettivi e modalità diverse. Un esempio sono i pantografi di Scheiner (Figg. 1-2), strumenti usati nella storia e ancora oggi per disegnare o incidere figure in proporzione, che sono stati esplorati e analizzati: per essere ricostruiti; per favorire la concettualizzazione della trasformazione in essi incorporata (omotetia); per sviluppare processi di argomentazione sul perché la struttura della macchina garantisce lo svolgimento della trasformazione.

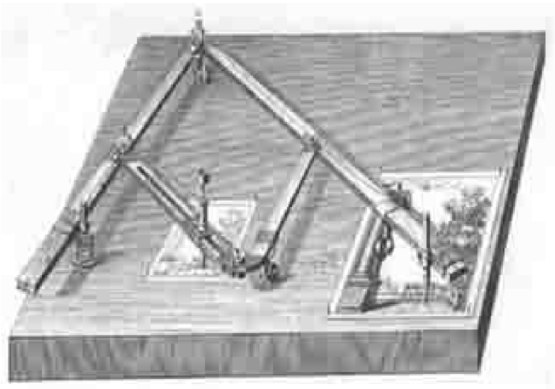


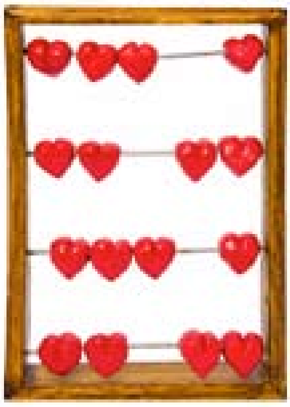
Fig. 1 da Dessein - Pantographe

Fig. 2 foto pantografo di Scheiner

Il Progetto ha favorito la diffusione su scala regionale di una metodologia laboratoriale che segue le indicazioni proposte dall'Unione Matematica Italiana (questa idea di laboratorio colloca nella tradizione storico-culturale europea sostenuta nell'ultimo secolo dalla ICMI, International Commission on Mathematical Instruction, e ripresa dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica nel curricolo "Matematica per il cittadino") ed è stato anche l'occasione di investire le più recenti ricerche in didattica della matematica per la progettazione e realizzazione di una formazione insegnanti innovativa sia per quanto riguarda la metodologia laboratoriale adottata, sia per la scelta dei focus sui processi di esplorazione e argomentazione e sugli aspetti culturali.

Per una documentazione delle esperienze legate al Progetto si rimanda al report finale in corso di stampa (Azione 1: Macchine Matematiche per l'Emilia-Romagna, MMLab-ER, in stampa, a cura di F. Martignone, contenuto in "Progetto scienze e Tecnologie in Emilia Romagna", Ed. Tecnodid), ai siti dei centri di Piacenza e Rimini e al sito del Laboratorio delle Macchine Matematiche.

Matematica per passione
di Chiara Battagion e Orietta Zangiacomi



Dal progetto "Matematica per passione" alla conquista della "Coppa Aurea" fino alla medaglia d'oro delle Olimpiadi nazionali a squadre. Luogo di partenza: il liceo scientifico "Leonardo da Vinci" di Treviso.

L'attività di ritrovarsi, presso il Liceo "da Vinci", tra alunni e insegnanti a discutere su temi matematici non strettamente legati ai programmi scolastici è iniziata nel 2004 con il nome "Matematica per passione"; l'attività si è trasformata poi, a partire dal 2006, nell'allenamento delle squadre di matematica. L'entusiasmo di alcuni ragazzi e la disponibilità di qualche insegnante hanno permesso all'iniziativa di crescere e di portare grandi soddisfazioni a tutti grazie alle gare che le squadre hanno affrontato quasi sempre con successo sia a livello locale che a livello nazionale.

Nell'anno scolastico 2008/2009 l'attività è cresciuta tanto che gli allenamenti hanno visto coinvolti circa 40 alunni di tutte le classi e 5 insegnanti, che si sono incontrati per studiare, discutere, svolgere problemi e gare di allenamento per 16 incontri nel corso dell'anno: il 20 marzo 2009 presso l'Università di Trieste la prima squadra (formata dai 7 alunni più "esperti") ha vinto la gara interregionale alla quale partecipavano circa 30 squadre delle province di Treviso, Trieste, Gorizia e della Slovenia e ha conquistato la "Coppa Aurea" insieme alla possibilità di partecipare alla gara nazionale a Cesenatico. Sabato 9 maggio 2009, nell'ambito delle Gare nazionali previste dalle Olimpiadi della Matematica, la stessa squadra ha vinto a Cesenatico la finale nazionale, alla quale partecipavano le migliori 70 squadre di tutta Italia. La squadra vincitrice è stata poi invitata a partecipare a una gara analoga in una scuola di Budapest e ora i ragazzi si stanno preparando per la "Coppa Kavics" della capitale ungherese, prevista per il 16 marzo 2010, per la "Coppa Aurea 2010" di Trieste e per la Gara Nazionale di Cesenatico di maggio 2010.

L'allenamento continuo e la voglia di fare sempre meglio hanno permesso ai ragazzi di migliorare la propria preparazione matematica anche a livello individuale: diversi di loro hanno partecipato alle gare individuali previste dalle Olimpiadi di Matematica, organizzate dalla Scuola Normale Superiore di Pisa e dall'Unione Matematica Italiana. Alla gara individuale nazionale di Cesenatico (8 maggio 2009) hanno partecipato 4 alunni del Liceo (su 300 partecipanti) che hanno guadagnato in tutto due medaglie d'oro, una d'argento e una menzione d'onore; il più giovane tra loro, che frequentava la prima classe, ha potuto partecipare nell'estate 2009 a un soggiorno-studio in Inghilterra offerto dalla Banca d'Italia ai primi 10 alunni di biennio classificati alla gara di Cesenatico.

I ragazzi vincitori potranno godere inoltre dei riconoscimenti previsti dal progetto nazionale di "Valorizzazione delle eccellenze", ma è da segnalare anche il fatto che tutti i ragazzi di quinta che hanno partecipato agli incontri e che si sono ora iscritti alle varie università sono riusciti a entrare nelle facoltà scelte (Matematica, Fisica, Economia, Ingegneria…) superando i test di ingresso con ottimi risultati. Diversi di loro sono anche riusciti a entrare nelle scuole di eccellenza, superando le prove previste: uno è alla Scuola Sant'Anna di Pisa, uno è al Politecnico di Milano, un altro alla Scuola Superiore di Udine. Tre alunni si sono iscritti alla facoltà di Matematica superando con successo il concorso nazionale per borse di studio "Indam", indetto dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi".

Ma al di là di tutti i riconoscimenti è da segnalare la valenza educativa del lavoro di squadra: i ragazzi sono di tutte le classi, dalla prima alla quinta, e devono lavorare insieme; per regolamento ogni squadra deve avere almeno qualche alunno del biennio e i capitani devono organizzare il lavoro in modo da sfruttare al massimo il tempo a disposizione per risolvere i problemi, dividendosi i compiti, a seconda di quanto ciascuno può fare e collaborando in ogni modo. Non ci sono il più bravo e il meno bravo, si tratta di valorizzare le capacità che ciascuno ha e metterle a disposizione degli altri. Tra tutti i partecipanti alle squadre è nata una amicizia forte, che coinvolge in qualche modo anche gli insegnanti e che rende più costruttivo anche il lavoro in classe di ogni giorno.

Guardando infine la situazione dal punto di vista dell'insegnante si nota che in ogni scuola sicuramente ci sono i ragazzi più capaci, che sanno ottenere ottimi risultati, ma ce ne sono anche tanti altri che possono ottenere ottimi risultati quando vengono sostenuti, aiutati, incoraggiati.

È con questo spirito che vorremmo continuare a svolgere questa attività, vorremmo aiutare i ragazzi a guardare in alto, cercando di lavorare in un clima sereno affinché ognuno riesca a far fruttare al massimo le proprie capacità.

Per approfondire:

- olimpiadi.dm.unibo.it
- www.liceodavincitv.it

Fisica e matematica in Rete
di Ada Sargenti

Un progetto per mettere insieme docenti di matematica e fisica, tra scuola e università. Un'idea che funziona e che è destinata a crescere.

Il progetto della Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, DI.FI.MA. in Rete, nato nell'ottobre 2008, si rivolge alle scuole di ogni ordine e grado e ai docenti di area matematica-fisica con la finalità di affrontare, attraverso un'azione sinergica e in continuità tra scuola e università, alcuni problemi che riguardano sul versante dei docenti: i cambiamenti della società, la problematicità dell'utenza, la mancanza di riferimenti stabili in termini di obiettivi da raggiungere; sul versante degli studenti: l'insuccesso in matematica segnalato dagli esiti scolastici, la demotivazione nell'affrontare la disciplina, i risultati negativi delle indagini nazionali e internazionali in ambito matematico e scientifico (test OCSE-PISA e INVALSI).

Le azioni del progetto consistono in momenti di formazione dei docenti in presenza e a distanza, servizi volti alla collaborazione e alla condivisione di materiali, alla creazione di comunità di lavoro, di apprendimento e di scambio professionale tramite l'utilizzo di una tecnologia open source, individuata nella piattaforma Moodle.

Gli insegnanti dell'area matematica e fisica interessati possono iscriversi gratuitamente alla piattaforma e in essa trovare materiali didattico-disciplinari e possibilità di collaborazioni e confronto. (Si sta pensando di aprire spazi anche per i docenti di Scienze e Chimica).

Il progetto fa seguito a iniziative precedenti su piattaforma Moodle, in parte già rivolte alla formazione dei docenti nella SIS Piemonte. Il nome DI.FI.MA. (DIdattica della FIsica e della MAtematica) riprende quello del convegno che si svolge con cadenza biennale a Torino e che quest'anno a settembre sarà alla sua quarta edizione. In esso vengono illustrate esperienze didattiche di docenti di tutti gli ordini di scuola, con attenzione a quelle svolte in collaborazione con studenti della formazione iniziale dei docenti (corso di laurea in formazione primaria e scuole di specializzazione per l'insegnamento secondario); vengono inoltre illustrati gli sviluppi della ricerca didattica nazionale e internazionale.

Pertanto la piattaforma si configura come riferimento permanente per il convegno mantenendo una continuità di rapporto con i docenti tra un convegno e l'altro, sfruttando le potenzialità di Moodle per rendere interattivo questo rapporto.

Inoltre l'offerta di DI.FI.MA. in Rete ha dato spazio anche ad altre iniziative e progetti dell'area fisico-matematica, costituendo quindi un riferimento di formazione permanente per docenti di matematica e fisica. Un gruppo di corsi fa esplicito riferimento alla continuità scuola secondaria-università. Si inseriscono qui il progetto Lauree Scientifiche, le indicazioni sui Precorsi per le matricole di Matematica, il progetto TARM.

Un altro gruppo di corsi raccoglie materiali didattici sui vari livelli scolari (infanzia, primaria, scuola secondaria di I e II grado); indicazioni sulle due discipline, matematica e fisica, in riferimento alla ricerca didattica nazionale e internazionale, ai convegni, alle pubblicazioni; informazioni sulla formazione iniziale dei docenti a livello nazionale e internazionale; il collegamento con il convegno DI.FI.MA. periodico.

Un terzo gruppo, che va sotto il nome di Lifelong Learning, oltre a presentare il panorama internazionale sul tema, raggruppa alcuni progetti specifici, come quello sull'uso di GeoGebra, un software di geometria dinamica libero e open source.

Infine alcuni corsi aiutano i docenti a conoscere e a gestire Moodle ed eventualmente a metterli in grado di installarlo nella propria scuola.

Responsabile del Progetto: Ornella Robutti, Dipartimento di Matematica, Università di Torino; Comitato scientifico-organizzativo: Giuseppina Rinaudo (Dipartimento di Fisica, Università di Torino), Alessio Drivet, Ada Sargenti, Claudia Testa (SIS Piemonte); Responsabile tecnico: Tiziana Armano, Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Storia, matematica e storia della matematica... nella primaria
di Franco Torcellan

Un'esperienza realizzata nella scuola primaria per vivere la matematica come una disciplina di ricerca e scoperta che risponde alle esigenze di vita e culturali dell'uomo; sviluppare conoscenze sull'uso dei numeri nella storia; impostare il metodo strutturato di lavoro del Gruppo Collaborativo.

LE DISCIPLINE

L'esperienza, condotta in una classe terza di scuola primaria (Istituto Comprensivo "C. Goldoni" di Martellago-VE), è stata incentrata sulla Matematica e sulla Storia della Matematica e ha toccato anche aspetti storici, antropologici e linguistici. A partire dalla domanda "Chi ha inventato i numeri e perché?" si è innescato un lavoro di ricerca con domande-problema volto a stimolare gli allievi a riflettere sulle ipotesi da loro prodotte e a stabilire modi e strumenti per giungere a una loro verifica e rielaborazione. Sono stati coinvolti anche altri soggetti (genitori, altri adulti competenti, compagni di classi superiori) e gli allievi sono arrivati a scoprire metodi diversi per contare e rappresentare i numeri usati da popoli antichi. L'attività ha previsto la divisione della classe in 3 gruppi, ciascuno dei quali ha elaborato un percorso di ricerca sul sistema di calcolo presso un popolo antico (Paleolitico, Maya e Sumeri), esponendo e trasferendo a tutta la classe durante l'Assemblea Plenaria le scoperte fatte, i risultati ottenuti, i manufatti prodotti.

LA VALUTAZIONE

La valutazione del lavoro ha tenuto conto della qualità degli apporti dati da ciascun allievo all'interno del Gruppo Collaborativo, in termini di produzione, riflessione, percezione e approccio al lavoro, nonché dell'autovalutazione degli allievi rispetto al lavoro di gruppo, della qualità della comprensione dei prodotti finali e degli studi di ogni Gruppo.

DIFFUSIONE E SVILUPPI

Alla fine del primo anno è stata allestita una mostra per condividere con genitori e colleghi insegnanti il percorso e i risultati. L'esperienza di laboratorio è continuata negli anni successivi traendo spunto dalla lettura del libro "I magnifici dieci" di Anna Cerasoli, e ha toccato argomenti come l'uso di alcuni abaci, l'algoritmo, la numerazione in base 2, il teorema di Pitagora, il Pi-greco e gli studi di alcuni matematici come Al Khuwarizmi, Fibonacci, G. Papi, Pitagora, Liu Hui, Sir G. Airy, Archimede, J. H. Lambert, F. von Liendeman.

METODOLOGIA

Si è adottata la metodologia della ricerca di gruppo collaborativo, che prevede l'organizzazione della classe in piccoli gruppi che lavorano insieme in base al principio di svolgere un compito mantenendo un ruolo. Ciascun allievo aveva dunque un preciso ruolo da mantenere (con compiti specifici) e alcune attività da svolgere insieme agli altri componenti del gruppo per portare a termine il compito dato dagli insegnanti. Il ruolo dell'insegnante è stato di conduttore. In base al lavoro da svolgere i gruppi si sono organizzati sia nella forma di collaborazione che nella forma di differenziazione. Grande importanza nel lavoro dei gruppi ha avuto il momento manipolativo, svolto in laboratorio. Periodicamente i gruppi si sono riuniti in Assemblea Plenaria per presentare ciascuno il proprio lavoro ai compagni e gestendo le varie fasi di lavoro: presentazione, spiegazione e risposta alle varie domande, proposte di esercitazioni, tutoraggio.

DIMENSIONE E DOCUMENTAZIONE

L'iniziativa è stata sviluppata a livello regionale e ha avuto un'impatto nazionale grazie ai riconoscimenti ottenuti (Selezione GOLD 2008 e Certificazione STELLA 2009) e alla diffusione dei risultati che ne è conseguita. È stata realizzata una documentazione "multimediale" mediante un wiki e un blog: vi hanno collaborato oltre ai docenti conduttori anche altri docenti dell'Istituto Comprensivo, docenti della Commissione Matematica e Scienze Scuole in Rete di Spinea (Venezia) e docenti di un'altra scuola della provincia (Gorgo al Monticano), che hanno sperimentato la metodologia del gruppo collaborativo e presentato la propria esperienza nel blog.

Il wiki è il contenitore principale che dà accesso alla descrizione generale del progetto ed è esplorabile secondo diversi approcci: quello strutturale dell'indice delle sezioni, quello cronologico della "linea del tempo", quello concettuale della "mappa interattiva", quello strumentale dei materiali riutilizzabili, senza grossi adattamenti, in caso di riproposizione dell'esperienza.

Il blog raccoglie invece il diario degli sviluppi della stessa.

La documentazione è stata momento di profondo riesame e di intensa riflessione professionale che ha portato i docenti a condividere maggiormente gli sviluppi dell'esperienza. Il Gruppo di Documentazione ha avuto la supervisione di due esperti, ricercatori del Nucleo Veneto dell'ANSAS che hanno coordinato, sostenuto e curato il complesso lavoro di multimedializzazione.

TRASFERIBILITÀ

Per trasferire questa esperienza occorre conoscere la metodologia del Gruppo Collaborativo, sia dal punto di vista teorico che pratico. È importante avere un gruppo di colleghi affiatato e collaborativo. La documentazione multimediale è sicuramente uno strumento di grande aiuto per chi volesse riproporre percorsi simili. Wiki e blog forniscono molti materiali, spunti di riflessione, strumenti di formazione e per la gestione delle attività.

Fusionismo olistico e software per la geometria dinamica
di Mario Barra

Problemi delle rivoluzioni in atto e ricerca di soluzioni. Importanza sociale e aspetti didattici dei Dynamic Geometry Software (DGS). Sviluppo della creatività. Il pensiero di alcuni grandi maestri. Il Fusionismo olistico[1].

Riassunto A partire da una breve analisi sulle attuali caratteristiche sociali, si cerca di mostrare come un DGS possa risultare utile per sviluppare alcune importanti capacità necessarie alla società, nella convinzione che questi software offrano notevoli possibilità didattiche e considerando come l'uso di strumenti tecnologici sia presente nei programmi scolastici. In particolare Cabri può offrire molte opportunità per disegnare in modo preciso, per investigare alcune proprietà e comprendere in modo approfondito, per sviluppare la creatività e in alcuni casi, per dimostrare molte proprietà matematiche. Un DGS può esercitare molto utilmente il ragionamento induttivo e soddisfare alcune esigenze estetiche attraverso il colore ed il movimento. Si cerca di tenere conto anche di alcuni aspetti psicologici. Vengono riportate a proposito molte indicazioni importanti di grandi matematici. Le considerazioni fatte derivano spesso da sperimentazioni effettuate sia con gli studenti, sia con gli insegnanti.

Abstract Starting from a social analysis I try to show how a Dynamic Geometry Software (DGS) can be useful to the new requirement of the society, believing that there are many learning values in such innovative tools, and considering that the use of technology is often strongly recommended by institutions and curricula. Cabri software and its dynamical aspects give many opportunities in the school to draw, to investigate, to understand and some times to proof, in an easy way, many mathematical properties. Inductive reasoning can be developed with a DGS and aesthetic needs can be satisfied drawing with colours and "dynamically". Many quotations of very important mathematicians are reproduced. The analysis is often based on empirical investigations on both students' and teachers' activities.

Mario Barra Dip. di Mat. Università di Roma "La Sapienza" barra@mat.uniroma1.it

[1] Si fa riferimento al *fusionismo* di Klein e di de Finetti, che collega le dimensioni dello spazio, il discreto e il continuo e tutte le discipline scientifiche. Il *fusionismo globale* o *olistico* intende considerare anche altre componenti dell'apprendimento: Barra M., 1995, Formule e teoremi per induzione naturale e "Fusionismo globale", in Jannamorelli B. (ed), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, Atti del II Sem. Internaz. di Did. della Mat., Sulmona, 30/III-1/IV/1995, Ed. Qualevita, pp. 165-192.

I computer e gli automi, internet, il cinema e la TV, i telefonini e le play-station, considerati insieme al considerevole aumento della popolazione e ai limiti delle risorse, portano, con rilevanza diversa, a molte rivoluzioni radicali e inedite per quanto riguarda il lavoro, la comunicazione, l'ecologia, le esigenze estetiche, i problemi psicologici e affettivi, … e la matematica.

Le parole chiave di queste rivoluzioni, per quanto riguarda gli individui, sono: maggiore complessità dei problemi e strumenti più potenti per affrontarli, diminuzione della routine, velocità della comunicazione e del reperimento di informazioni, maggiore importanza delle applicazioni, necessità di una manualità più consapevole e di una intellettualità più operativa e maggiore esigenze di: creatività, partecipazione individuale e collettiva, operatività, riconoscimenti collegati ai risultati, semplicità della comunicazione, colore, movimento, bellezza. L'aumento dell'inquinamento e la diminuzione delle risorse e degli spazi individuali disponibili rendono più difficile che la natura svolga una delle sue funzioni fondamentali: quella di soddisfare le esigenze fisiche, psicologiche, ludiche ed estetiche degli individui.

Dopo millenni nei quali probabilmente è stato vero il contrario, nel giro di pochissimi anni l'attività fisica viene svolta in spazi fruibili a pagamento, in Calabria gli stupendi "fiori del mare", gli *spirografi*, sono morti, a Ventotene i polpi sono scomparsi, al lago di Nemi i lucci appartengono ai ricordi del passato, le trote e i pesci in generale sono diminuiti notevolmente, …

Quanto segue prova a tener presenti gli aspetti indicati e cerca di approfondirli considerando in particolare gli insegnamenti dei "grandi" che ci hanno preceduto, con maggiore attenzione rivolta agli aspetti didattici e pedagogici dell'insegnamento della matematica.
In particolare si analizzano le potenzialità di un software di geometria dinamica (DGS) e, indirizzando l'attenzione:

- ad una matematica intesa "a misura della scuola e della società"
- ad un collegamento fra "tutti" gli aspetti dell'insegnamento inseriti in un quadro di riferimento il più possibile generale, armonico, coerente, semplice e convincente (*fusionismo olistico*), che si ritiene opportuno
- ai "grandi" della storia e in particolare ai matematici che si sono occupati di didattica, dei quali verranno riportate alcune indicazioni didattiche con il riferimento bibliografico
- alla valorizzazione delle congetture personali e delle dimostrazioni ad esse relative
- ai particolari che si ritiene possano migliorare la comunicazione e la memorizzazione
- a quelle che si considerano delle "esigenze naturali" e in particolare: lo sviluppo dela creatività il ragionamento induttivo, le generalizzazioni a partire da esempi, la geometria, gli aspetti dinamici, i concetti espressi con parole "semplici", il "buon senso", gli aspetti estetici, edonistici e gli a-spetti affettivi, emozionali e psicologici.

Verranno limitati i discorsi teorici e si cercherà di esprimere alcune idee tentando di stabilire un collegamento fra aspetti particolari e generali.

- **Riassunto e approfondimento. Da quanto segue:** [2]

possono seguire in particolare:

- minore difficoltà di: esecuzione (minore necessità di manovali, operai, ...), amministrazione e contabilità (ragionieri, cassieri, ...), comunicazione (postini, uscieri, ...), intermediazione (rappresentanti, negozianti, ...), ...
- disoccupazione e meno lavoro a lungo termine (globalizzazione, lavoro nero, ...
- incertezza per il futuro collegata a: limiti delle risorse, crescente presenza di robot e di computer che, per lo più, creano loro stessi,[3] generano disoccupazione, ... e non pagano i contributi per le pensioni, precarietà, necessità di inventarsi nuove occupazioni, di aggiornarsi, di riqualificarsi, di utilizzare al meglio tutte le capacità dell'individuo: deduttive: ... maggiormente presenti negli intellettuali, e induttive: ... maggiormente presenti nel mondo della produzione, ...,
- necessità di una minore distanza fra lavoro manuale-esecutivo-routinario e intellettuale-direttivo-manageriale, con una maggiore consapevolezza dei problemi comuni e con una maggiore esigenza di strumenti nuovi che possano risolverli, sia individualmente, sia all'interno di gruppi con eventuale collegamento via Internet. Necessità di una drastica diminuzione delle posizioni di potere immotivato, ...,
- necessità di sviluppare le capacità creative, scientifiche ed artistiche, indirizzate in modo operativo alla soluzione dei problemi (saper individuare le ipotesi più probabili che sono alla base di una proprietà o di una questione, saper scegliere, saper collegare, saper apprezzare gli aspetti estetici e sapersi esprimere valorizzandoli, saper comunicare in modo sintetico finalizzato ad una conclusione e ad una maggiore comprensione e memorizzazione dei messaggi, saper dimostrare, ...).

[2] Nell'originale si può notare la differenza nella piacevolezza estetica offerta dal colore e dal "bianco e nero".

[3] La rivoluzione industriale ha comportato "unicamente" un cambiamento del tipo e della sede di produzione.

La società e la scuola

- **Fino a poco tempo fa** la società aveva bisogno fondamentalmente di persone capaci di ricoprire, spesso individualmente, mansioni esecutive e di routine. Anche come residuo dell'"antica" diffidenza nei riguardi della diffusione della cultura poteva permanere un interesse a limitare la critica di qualche "assioma" utile per mantenere alcuni privilegi.
- La scuola e la società "assecondavano" tali esigenze favorendo un "proficuo inserimento" degli individui, in particolare attraverso:

1) lo sviluppo delle "qualità" potenzialmente utili allo svolgimento di mansioni esecutive e di routine, rendendo funzionali nell'insegnamento della matematica: espressioni, radici quadrate, logaritmi, …, e il ragionamento ipotetico-deduttivo, che indirizza maggiormente l'attenzione alle conseguenze di alcune scelte, rispetto ad una loro analisi critica

2) la "selezione dei più adatti" ai quali prometteva una reale promozione sociale.

Le attività non scolastiche (studio, letture, esperienze, giochi: "Meccano", macchinette a molla, costruzioni, giochi in strada,…) potevano favorire lo sviluppo di capacità "diverse".

- **Oggi** le mansioni esecutive e di routine vengono svolte dai computers e dagli automi
- ad esempio, l'eliminazione dei rifiuti, che non presentava problemi, ora necessita di un coinvolgimento consapevole, personale e collettivo
- l'idea che "il pezzo di carta" significhi promozione sociale convince sempre meno
- la tecnologia (es.: play stations) è poco comprensibile nel suo funzionamento e "difficilmente" agevola lo sviluppo di capacità intellettive. Diminuiscono in generale le possibilità e gli spazi per il gioco intelligente, creativo, personale e di gruppo.

[disegno realizzato con Cabri II Plus]

- **Sebbene** in 50 anni la popolazione mondiale sia più che quadruplicata, passando da 1,5 miliardi a 7 miliardi di individui, …, con nuovi problemi sempre più complessi e interconnessi (limiti delle risorse, disoccupazione, inquinamento, globalizzazione) …

- l'economia individua nei giovani i suoi migliori clienti, chiedendo che siano consumatori passivi delle sue proposte
- la pubblicità e la propaganda economica e soprattutto politica divengono sempre più capillari, pervasive, sofisticate e difficilmente decodificabili, tendendo a sviluppare nelle persone un consenso passivo.
- **Viceversa**, la crescente complessità della maggioranza degli aspetti della società richiede individui sempre più capaci di percepire, distinguere, selezionare, connettere, affrontare e risolvere i vari aspetti della realtà e i suoi problemi, in modo cosciente, critico, attivo, creativo, ...
- **Quindi** probabilmente la scuola dovrebbe perseguire operativamente e in modo convincente l'obiettivo di rendere gli studenti capaci di affrontare e risolvere i problemi della società in modo efficace, riconoscendo le esigenze che hanno i giovani, insegnando anche e in particolare, *a contestare costruendo*. Il problema di fondo è cercare di risolvere le contraddizioni, le storture, le ingiustizie e le inefficienze della società.

Per raggiungere questi obiettivi ritengo probabile sia necessario:

- diminuire le difficoltà tecniche della matematica utilizzando le nuove tecnologie disponibili; diminuire l'importanza degli aspetti nozionistici e l'eccessiva attenzione nei riguardi degli aspetti formali, del "rigore" e dell'"ordine" e dei particolari poco significativi e aumentare la valorizzazione delle idee originali e creative, anche quando sono espresse in modo approssimativo. In generale, può risultare utile considerare che l'eccessiva cura indirizzata alle rifiniture dei particolari può sottrarre energie alla creatività, fino a soffocarla.
Insegnare i dettagli significa portare confusione. Stabilire la relazione tra le cose, significa portare la conoscenza" (**Montessori M.**)
- studiare in che modo si può tenere conto dei problemi affettivi e psicologici che possono nascere dal coinvolgimento in prima persona e dalla diminuzione della possibilità di giustificare il proprio disimpegno addebitandolo alle caratteristiche degli oggetti di studio. Accettare altri limiti delle personalità in formazione: … considerare, ad esempio, che risolvere un problema significa appassionarsi ad esso (**Polanyi**, 1990) credendo in se stessi, e che in questo modo a volte si esagera.
- considerare che la difficoltà di un problema dipende dagli strumenti che si usano e dal loro "prezzo" che è indirettamente proporzionale alle potenzialità che offre e all'importanza degli obbiettivi che permette di raggiungere, e direttamente proporzionale alla difficoltà di utilizzarlo (penso sia condivisibile affermare che ogni DGS "costa" molto poco perché è molto semplice, e rende decisamente molto).
- offrire strumenti operativi e motivazioni convincenti per sviluppare le capacità degli individui attraverso lo studio e l'attività personale. Assegnare minore importanza ad alcuni risultati rispetto al processo che porta al loro raggiungimento
- diminuire gli insegnamenti frontali rispetto a quelli interattivi. Individuare operativamente delle situazioni da prospettare ai giovani utili per sviluppare atteggiamenti personali attivi e creativi

- favorire lo sviluppo delle capacità di apprendimento personale cercando di limitare i timori e la soggezione nei riguardi della matematica e dei matematici. Una domanda utile può essere: una sorta di irriverenza nei riguardi della matematica può essere funzionale al raggiungimento di "alcuni" obiettivi?
- sviluppare il più possibile negli individui, in particolare nei giovani, il ragionamento induttivo e "naturale", per esercitare e potenziare in particolare alcune loro capacità importanti per la società, con modalità spesso più efficaci e complete rispetto a quelle derivabili dall'esercizio del ragionamento ipotetico-deduttivo. E' possibile che il ragionamento assiomatico riesca più utile a chi deve eseguire quanto "altri" richiedono e meno adeguato per chi vuole individuare ed affrontare i problemi e le contraddizioni della realtà e sviluppare in generale atteggiamenti critici, attivi, consapevoli e creativi
- indirizzarsi più direttamente alla costruzione di un *corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società*, considerando ad esempio che l'architetto non ha bisogno di definire che cos'è un edificio, che il cittadino deve argomentare e non dimostrare, e che frequentemente l'individuo "scopre" e si forma le proprie convinzioni e consapevolezze gradualmente, spesso in modo induttivo, e che quindi sarebbe utile attrezzarlo per svolgere correttamente questo tipo di ragionamento che è alla base della formazione dei propri convincimenti
- sviluppare negli insegnanti degli atteggiamenti attivi e creativi collegati a quelli illustrati precedentemente, fornendo loro molti esempi convincenti che favoriscano la costruzione di conoscenze e di sensibilità didattiche, necessarie alla propria professionalità, principalmente attraverso acquisizioni personali con una sorta di *problem solving* indirizzato all'insegnamento.

Forse può essere utile considerare che:

- la matematica è nata per raggiungere degli obbiettivi che possono essere diversi da quelli che dovrebbe avere la scuola. Per queste finalità può essere conveniente riconsiderare alcune scelte operate dalla storia, cercando eventualmente di individuare nuovi termini, simboli, argomenti e metodi. Ad esempio può essere importante domandarsi se sono ancora validi gli insegnamenti di Euclide, ai quali invece si sta tornando, considerando che questo grande matematico ha voluto principalmente sistemare organicamente e rifinire alcune conoscenze e scoperte effettuate prima di lui e che ha raggiunto questi obiettivi rispecchiando la cultura del tempo, che risultava, ad esempio, essenzialmente statica. Forse per questo la matematica ha cercato di "evitare" alcuni "aspetti dinamici", pur utilizzandoli? Inoltre la matematica dei suoi tempi, per i limiti delle sue elaborazioni, ha sancito una separazione fra discreto e continuo e ha affermato la sua contrarietà alle applicazioni e ai riferimenti reali concreti. Così Euclide, pur fondando la sua geometria su una sorta di riga e compasso, non fa mai riferimento esplicito a questi oggetti, anche perché, volendo limitare le loro proprietà "all'osso", non corrispondono a reali strumenti esistenti. Forse è più adatto Archimede? il più grande creativo che si è occupato anche di applicazioni, [4] consideran-

[4] Ne esaltano questi aspetti con grandissima ammirazione: Tito Livio, Cicerone, Valerio

do come prove reali gli splendidi ragionamenti concreti che lui stesso non riteneva fossero delle dimostrazioni? e considerando infine che "ogni cosa può condizionare tutto"

- la matematica che si usa oggi nelle applicazioni (e non solo), e che probabilmente si utilizzerà maggiormente domani, è differente da quella del passato (**Fichera**, 93). Oggi nelle applicazioni si utilizzano molto i polinomi per i quali possono essere sufficienti alcune conoscenze sugli ipercubi per calcolarne gli integrali e le derivate in "modo comprensibile".
- In generale, dall'esigenza di "sapere di più" segue banalmente la necessità di rendere le conoscenze più semplici, operative, efficaci, coerenti, e facilmente fruibili e molto attente ai particolari che ne facilitino l'apprendimento, pur sapendo che limitandosi "troppo" ad alcuni di questi aspetti diminuisce la probabilità di collegarne insieme un numero "adeguato".
- più in generale, la complessità porta all'esigenza di "sbagliare meno"; anche per questo obiettivo può essere utile guardare ai particolari all'interno di un disegno globale utopistico, cui tendere.

Alcuni obiettivi particolari che ritengo importanti da raggiungere:

- *demistificare* e *togliere dallo sgabello* (**de Finetti**, 1967, 1969) una parte della matematica e della cultura in generale, esaltando l'uso di parole semplici, facilmente comprensibili, mirate alla sostanza,[5] favorendo il *sermo humilis* rispetto al *sermo sublimis*, limitando i termini tecnici (**Atiyah**, 2007) e gli aspetti nozionistici e diminuendo l'importanza delle definizioni "iper-precise" (**Rota**, 1999), cercando di farle raggiungere *per scoperta* come obiettivo di un processo graduale di precisazione
- cercare di favorire un apprendimento intuitivo "personale e attivo" che parta da quello naturale e sviluppi in particolare alcune capacità che possano essere utili al ragionamento creativo, come le capacità di scegliere, saper collegare, scoprire, verificare, esprimere e generalizzare, "cogliere la bellezza", valorizzarla e generarla … (**Poincaré**, **Hadamard**, 1993, **Hardy**, 1989, **Russell**, 1964).

Massimo, Plutarco, Polibio, Erone, Plinio, Vitruvio, Seneca, … Ad Archimede si rifanno esplicitamente Leonardo, …, Tartaglia (riproduce nel 1543 una edizione a stampa pubblicata da Gaurico nel 1503), Luca Valerio (1604), Nepero (1614), Keplero (1615), Galileo (1632), Cavalieri (1635 e 1647), Torricelli (1644), … Fermat, Pascal, Wallis, Huygens, Barrow, Borelli, Newton … Forse è necessario ristabilire l'ordine di importanza fra i grandi della storia secondo il quale, ad esempio, l'Enciclopedia Italiana Treccani dedica 10 colonne ad Archilòco (*principe dei poeti giambici*) e 6 colonne ad Archimede. "Sembra" che Archimede abbia scritto un libro in cui descrive la costruzione di un planetario (uno strumento meccanico) che riproduceva il movimento della terra intorno al sole, della luna intorno alla terra e degli altri pianeti intorno al sole. Uno strumento simile fu studiato da Keplero (*Opera*, I, p. 88, ed. 1860), poi costruito da Huygens (*Descriptio Automatis planetario*, in *Op. post.*, 1713, pp. 431-460).

[5] Forse potrebbe essere utile riconsiderare ad esempio l'importanza di quei termini o locuzioni, ai quali noi siamo abituati mentre creano problemi agli studenti, come *congruente*, *equivalente*, *a sta a b come c sta a d*, …

Si è capito che l'invenzione svolge un ruolo costante nella vita umana, ... che risponde a un bisogno che può essere pratico, estetico o speculativo, ... (**Souriau**, in *Théorie de l'invention*, **Hachette**, 1881).

E' possibile che il ragionamento più creativo e utile sia quello personale e induttivo, quasi totalmente assente nella scuola, che può essere esercitato utilmente con i DGS.

Importanza sociale di un DGS

Un DGS, con buone potenzialità:
- permette un rilancio della geometria che costituisce probabilmente l'interfaccia più utile e naturale fra ragionamento usuale e scientifico e che, sempre con buona probabilità, può sviluppare maggiormente le potenzialità cognitive rispetto a quanto può essere ottenuto con l'apprendimento di tecniche o di regole di routine
- facilita lo sviluppo del "ragionamento visivo" che viene considerato molto importante per favorire il ragionamento creativo
- permette di utilizzare "maggiormente" il linguaggio delle immagini che probabilmente può essere memorizzato più facilmente delle parole
- è abbinato al computer che piace molto ai giovani e offre agli studenti la possibilità di usarlo non soltanto per trastullarsi con internet o con i video-giochi
- permette l'uso di un linguaggio più affine ai "nuovi" linguaggi cui sono abituati gli studenti e può collegare la comunicazione orale, scritta, visiva e "dinamica"
- "tiene conto che da sempre" il disegno eseguito personalmente, può essere *utile per chiarirsi le idee* (**Pestalozzi**, in Silber, 1971)
- può costituire un "prolungamento naturale ed esperto" della nostra mano, permettendo di realizzare con poche regole semplici un disegno preciso, o anche approssimato nei limiti che interessano, dinamico e personale, utile per chiarire, indagare, approfondire, precisare, e rappresentare il nostro pensiero, stabilendo un collegamento fra la mano e l'"occhio della mente" (**Fichera**, 1972), così come forse avviene "da sempre" in modo naturale. Inoltre "questa mano esperta" si presenta al servizio di chi la usa e con la sua precisione, con i colori e per i suoi aspetti dinamici e con le scelte che può comportare può sviluppare il senso della bellezza
- "tiene conto" del fatto che le esigenze estetiche ed artistiche costituiscono un bisogno primario, come è risultato sperimentalmente e in modo sensibile in alcune occasioni [6]
- può mettere in evidenza alcuni particolari utilizzando la dimensione, il colore e lo spessore delle linee e permette di cancellare, copiare, evidenziare, deformare, colorare, spostare le "masse", riutilizzare un file modificandolo in funzione degli approfondimenti o adattandolo facilmente ad altri argomenti e abituando a risolvere personalmente molti "piccoli" problemi

[*Poligoni dinamici*. Disegno realizzato con Cabri II Plus]

- costituisce una occasione per approfondire un argomento, cioè un'OPA[7], ad esempio stimolando la ricerca personale delle proprietà che possono agevolare una rappresentazione tridimensionale "corretta", in particolare quando vengano considerati più "naturali" e affascinanti i solidi delle figure piane e gli ipersolidi ancora più interessanti,[8] pur limitando la precisione agli aspetti che si vogliono evidenziare.[9]
In questa ricerca i procedimenti per tentativi possono risultare molto utili.

Naturalmente il "**trascinamento**" svolge un ruolo primario per obiettivi del genere. Altri ne hanno parlato in modo molto più approfondito ed interessante di quanto potrei fare io (**Arzarello et al.**, 2002)
- permette di prefigurare e verificare facilmente le conseguenze delle proprie scelte[10]
- permette di **scegliere** fra varie soluzioni "tendendo" a quella più veloce, quella che utilizza solo una parte degli strumenti disponibili, o quella più valida esteticamente, sviluppando in tal modo le capacità creative,

[6] Ricordo in particolare le Esposizioni di Matematica di **Emma Castelnuovo**, cui ho partecipato, dove gli allievi "naturalmente" curavano in modo decisamente maggiore gli aspetti estetici della loro comunicazione, tradotta nei cartelloni, rispetto a quelli matematici, anche per potersi riconoscere più facilmente nei propri prodotti. "Lo stesso" all'università.

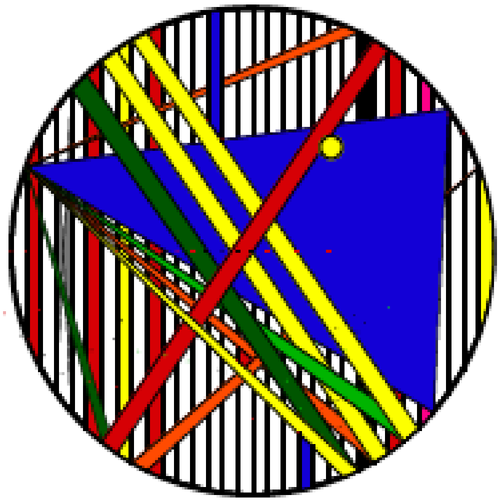
[7] Il termine è stato scelto scherzosamente ricordando il significato di OPA in Economia. Qui voglio dire semplicemente che il disegno, un po' come le chiacchierate con gli amici o la psicoanalisi, offre una buona occasione per rilassarsi e pensare all'argomento.

[8] Barra M., Giammei F., Laganà G. A., Spagnulo D., 2007, Molte proprietà semplici individuate e dimostrate dagli studenti attraverso ragionamenti concreti simili a quelli naturali. Scelta e uso dei simboli. Sviluppo dell'autostima degli studenti, *Progetto Alice*, N.23,Vol.8, Ed.Pagine, 201-244 e Barra M. Giammei F., Laganà G. A., Spagnulo D, 2008, Cartesio Eulero, …, Cauchy e la formula V-S+F=2. Gli studenti con l'aiuto della storia costruiscono una dimostrazione semplice, fantasiosa e applicabile agli ipersolidi, *Progetto Alice*, N. 27, Vol. 9, Ed. Pagine, 419 – 457.

[9] Anche questa è una scelta importante.

[10] Ritengo questo aspetto fondamentale tanto da farmi chiedere se potrebbe essere utile introdurre il lavoro manuale nella scuola.

… *scoprire o inventare è scegliere e questa scelta è governata dal senso della bellezza*. (**Hadamard**, 1993, **Hardy**, 1989, **Russell**, 1964)
- permette di individuare soluzioni tecniche ed estetiche con la possibilità di diminuire quel sentimento di estraneità causato spesso dalla matematica, offrendo la possibilità di riconoscersi in un prodotto personale, agevolando in tal modo l'auto-gratificazione che facilita un apprendimento sereno e piacevole e la futura ricerca di sensazioni analoghe
- facilita il raggiungimento di obbiettivi ambiziosi. Questi possono aumentare la fiducia in se stessi costituendo una premessa importante per essere bravi studenti



Cabri, ormai famoso, scivola fra i ghiacci

- facilita il collegamento fra sensazioni piacevoli e matematica
- offre la possibilità di creare molto facilmente dei prodotti artistici al computer
- "tiene conto" del fatto che il movimento acuisce l'attenzione e sviluppa le capacità di osservazione (**Atiyah**, 2007)
- può facilitare l'apprendimento personale e "induttivo"
- può aumentare le possibilità di invenzione offrendo l'opportunità di esercitarle e realizzarle molto facilmente (*problem solving and posing*)
- può aumentare il desiderio di dimostrare delle proprietà individuate personalmente
- permette di "suggerire" agli studenti "con discrezione" mettendo più o meno in evidenza o accostando alcuni particolari ("metodo del rinforzo" di **Emma Castelnuovo** [11])
- permette di realizzare disegni veloci e precisi, predisposti prima "dell'uso" come accade con i lucidi per lavagna luminosa, ma in modo più pratico, veloce e con potenzialità ancora "da scoprire" (es.: cartoni animati[12])

[11] Ho visto Emma trattare con molta freddezza alcuni studenti che non sfruttavano le loro potenzialità, fino a quando, per qualche elemento positivo da Lei colto, "suggeriva" loro alcune soluzioni che dovevano soltanto essere da questi ripetute. Ho appreso che quel cambiamento di atteggiamento, quella dimostrazione di affetto può "fare miracoli".

[12] Ho realizzato con Cabri un semplice cartone animato: *Balla Linda*.

- permette di correggere i disegni con miglioramenti anche piccoli, spesso necessari dopo una sperimentazione, agendo sullo stesso file senza "rifare tutto", come avviene più spesso con i lucidi
- diminuisce lo spreco della carta e dei lucidi
- permette di consegnare molto facilmente "tutto" il materiale agli studenti o ai colleghi ("pennette"…) favorendo il collegamento e il confronto
- permette di riconsiderare e selezionare alcuni argomenti di matematica che possono essere trattati in modo più convincente e veloce attraverso le potenzialità che offre
- permette di creare ed utilizzare nuovi strumenti, trasformazioni e teoremi matematici che si basano sulle proprietà dinamiche (affinità, "aperture", "radialità", … [13])
- recupera parte delle potenzialità offerte dal materiale didattico concreto, diminuendo le difficoltà di costruzione, di manutenzione e di "stoccaggio" del materiale (quale insegnante ha tre armadi per poter conservare il materiale didattico come Emma Castelnuovo?)
- costituisce uno strumento operativo che può far ricordare più facilmente "come si divide un segmento in tre parti uguali" e far capire il motivo per cui "nessuno" si rammenta perché *il volume della piramide è: area di base per altezza diviso tre*
- può favorire il collegamento fra settori differenti della matematica, e quindi il *fusionismo,* con lo sviluppo di altri software (TI-Nspire, GeoGebra, …) per una matematica "informatizzata" che possa diminuire le difficoltà ed eventualmente sostituisca gradualmente il calcolo infinitesimale (**Fichera**, 93) a favore del ragionamento infinitesimale
- può conferire alla matematica, con il *fusionismo*, il colore e il movimento, un tipo di bellezza facilmente costruibile e percepibile e quell'alone di magia che spesso hanno le altre scienze
- può facilitare la costruzione delle basi di approfondimento di un argomento in modo naturale, favorendo in questo modo, penso di poter dire, le soluzioni ottenute in modo inconscio (l'inconscio esiste: … istinto, sogni, memoria, ricordi o soluzioni improvvise, …)

Ciò che colpisce in un primo momento, è questa sembianza di illuminazioni improvvise, segni evidenti di un lungo lavoro inconscio precedente, il ruolo di questo lavoro inconscio nell'invenzione matematica mi sembra incontestabile. **Poincaré**, *Matematical Creation,* 1913, pp. 35-45

- può convincere dell'importanza di considerare anche i particolari minimi (scelta delle lettere, dei simboli, …) che possono favorire la comunicazione
- può evitare di trasferire agli studenti i "difetti" di quei matematici, anche sommi, troppo rivolti ad aspetti "infinitesimi" e poco utili, attraverso un apprendimento "più" naturale, pratico, operativo, piacevole e completo.

---

[13] Barra M., 1975, The cycloid - A didactic Experience - A new proof, *Educational Studies in Mathematics*, 6, 93-98 e Barra M., 2004, Una nuova trasformazione non lineare resa possibile dalle proprietà dinamiche di Cabri, gli "avvolgimenti radiali". Baricentro di una sinusoide, area del cerchio, della spirale di Archimede, della Cardioide e di altre curve, determinate in modo nuovo. "Fiori matematici", *Progetto Alice,* N. 14, Vol. 5, Ed. Pagine, 305-330.

Laplace non coglieva alcuna questione sotto il suo giusto punto di vista: cercava delle sottigliezze ovunque, aveva solo idée problematiche, e infine portava lo spirito dell'"infinitamente piccolo" perfino nell'amministrazione. **Napoleone Bonaparte** (Napoleone riuscì a "sopportare" il grande Laplace come Ministro dell'Interno soltanto per meno di sei settimane)

- fornisce un "contro-esempio" rispetto alla pedagogia attuale: i giovani al computer apprendono molto spesso da soli, induttivamente, "smanettando".
- mostra come i DGS possano dare delle risposte positive alle richieste della società.

Gli insegnamenti dei "grandi" della storia e collegamento con i DGS

Bruno de Finetti e George Polya Alla proiezione del film di Polya *How to solve it*, del 1973, (diapositive mosse da un pupazzo (Giorgietto = George Polya) in mano a de Finetti; formule mostrate facendo finta che fosse il pupazzo a spostarle, …) de Finetti (1973) così commenta le modifiche portate su propria richiesta:

Di nuovo c'è l'uso dei colori: in ROSSO sono indicati i DATI (e poi, man mano, le cose che divengono note in funzione dei dati); in VERDE le INCOGNITE (ciò che si cerca, e le grandezze ausiliarie via via introdotte finché non sono state espresse mediante i dati). Il procedere del ragionamento consiste visivamente in collegamenti fra punti, che, man mano, da verdi divengono rossi... Polya accettò volentieri la diversa utilizzazione dei colori... Un perfezionamento possibile, se uno schema con le convenzioni suddette si facesse in animazione, consisterebbe nel far avvenire le variazioni con continuità ...".

Bruno de Finetti e George Polya pensavano ai DGS?

I DGS facilitano la possibilità di tener conto utilmente di importanti indicazioni fornite da alcuni grandi uomini della storia, spesso molto interessati ad aspetti didattici.

Poiché preferisco mostrare quanto voglio dire attraverso gli esempi, e poiché ritengo poco frequente che si vadano a leggere i testi indicati nei riferimenti bibliografici, spesso inutilmente lunghi, limito le "rimasticazioni" personali di quanto hanno detto i "grandi" ed adotto una soluzione "intermedia" riportando alcuni loro brani che mi hanno ispirato, sperando anche di stimolare una maggiore volontà di approfondirli.

Considero importante fare riferimento ai grandi della storia in tutti i campi, in particolare perché:
- spesso le ricerche didattiche sono maggiormente indirizzate alla "matematica semplice". In questo modo è possibile che si possa tener conto limitatamente di tutti i problemi, in modo globale
- non si capisce in particolare perché siano spesso ignorati autori come Laplace, Poincaré, Polya, Hadamard, Lakatos, i Castelnuovo, Lombardo Radice, de Finetti, …, che ad alcuni appaiono molto più "utili" didatticamente di altri autori "datati" oppure noti unicamente all'interno di un insieme troppo ristretto e per questo forse poco adatti per affermare la filosofia del *fusionismo*.[14]

[14] Il fusionismo è collegato alla necessità di collegare un numero crescente di problemi.

** ... fra tutti i nostri sensi, il più acuto è la vista: perciò è possibile ricordare con molta facilità ciò che abbiamo percepito con l'udito o il pensiero se lo consegniamo alla mente con l'aiuto della vista.*[15]

Cicerone M.T., *De Oratore*, 2, 357, BUR, 1994,

* *Nutre la mente ciò che la rallegra.* **S. Agostino.**

** L'aritmetica e la geometria sono scienze collegate che si sostengono reciprocamente, non può essere insegnata la dottrina del numero, se non viene intersecata con una certa geometria, anche i numeri operano riferiti alla geometria ...*[16]

Leonardo Pisano, 1202, *Liber Abaci.*

** è "cattiva" filosofia quella che sommerge fatti e idee in nuvole di parole e superfetazioni irrilevanti; è "buona filosofia" quella che cerca di eliminare tutto ciò che di troppo e di illusorio viene già aggiunto dal linguaggio comune per ridursi al minimo veramente essenziale ... l'esigenza cui deve rispondere è di semplificare, di chiarire, non di gravare il discorso di significati astrusi ... le considerazioni "filosofiche" sono intese non ad aggiungere sovrastrutture e fronzoli bensì (come ritengo utile) a scarnificare di quanto rimane di troppo anche nelle concezioni scientifiche.*

de Finetti B., 1967, *Atti della tavola rotonda tenuta a Poppi*, 11-12 Giugno 1966, Scuola di Statistica dell'Università, Firenze, pp. 146 e 203- 204.

- In effetti, devo ammettere che provo un senso di profondo disturbo quando alcuni colleghi usano troppi termini tecnici: sono stati educati a credere che ogni loro affermazione, debba essere precisa e corretta, come gli avvocati. Per quanto mi riguarda preferisco usare parole che siano patrimonio dell'intera comunità scientifica, e non necessariamente dei soli matematici. Se spiegassimo le nostre idee senza usare un'inutile quantità di gergo tecnico e di formalismi, anche Newton, Gauss e Abel potrebbero capirci. In fondo, erano ragazzi piuttosto svegli!

Atiyah M. F., 2007, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo.

** Sul piano accademico alligna in genere la civetteria di voler separare e collocare su uno sgabello più onorifico o certe speciali cose o certi linguaggi più pomposi per trattare di comuni cose, in modo da riservare a ciò che si colloca sullo sgabello, e negare a ciò che si lascia sul pavimento, la qualifica di scienza. Molti dei criteri di separazione adottati a questo scopo e delle discussioni cui conducono hanno indubbiamente valore e interesse da qualche punto di vista, ... ma ogni erezione di una qualunque siffatta distinzione a criterio di discriminazione accademica costituisce una mutilazione suicida: si uccide la scienza che è vita cui nulla è precluso, collocando al suo posto un feticcio imbalsamato e gonfio di cattedratica boria.*

de Finetti B., 1969, *Un matematico e l'economia*, F. Angeli, Milano, p. 94.

* *Egli* [il padre di Fichera] *preferiva insegnarmi passeggiando ... Il suo insegnamento, anche di questioni matematiche, specie di geometria, avveniva senza che né lui che io avessimo un foglio di carta ove scrivere. Egli voleva che io immaginassi da me le configurazioni geometriche, a volte anche assai complicate, di cui egli veniva a parlarmi. Ciò perché io sviluppassi al massimo la mia intuizione geometrica. E voleva che io cogliessi la bellezza dei risultati che egli mi esponeva, assicurandosi così che io avessi compreso appieno il significato.*

---

[15] *... acerrimum autem ex omnibus nostris sensibus esse sensum videndi; qua re facillime animo teneri posse ea, quae perciperentur auribus aut cogitatione, si etiam commendatione oculorum animis traderentur.*

[16] *Et que arismetica et geometria scientia sunt connexe et suffragatorie sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi intersecantur geometrica quedam, vel ad geometriam spectantia que hic tantum juxta modum numeri operantur; qui modus et sumptus ex multis probationibus et demostrationibus, que figuris geometricis fiunt.*

Fichera G., *Alcuni ricordi* (Lettura registrata alla Discoteca di Stato il 22/V/1972).

* *Ho sempre indicato nel fusionismo il principale concetto di base per il miglioramento dell'insegnamento e della comprensione della matematica. Nel senso più specifico, in cui fu introdotto da Felix Klein, il fusionismo consiste nella fusione dello studio di geometria da una parte e di aritmetica, analisi ecc. dall'altra; più in generale si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia... mentre le tendenze antiquate predicavano il "purismo" di ogni ramo da coltivare isolato senza contaminazioni.*

de Finetti B., 1974, Contro la "Matematica per deficienti", *Periodico di Matematiche*, vol. 50, n. 1-2 Maggio, pp. 95-123.

* *... bisogna che nei primi gradi delle scuole (scuole elementari e scuole medie) l'insegnamento della matematica sia esclusivamente intuitivo. ... bisogna suscitare la "curiosità" degli allievi. Specialmente la geometria si dovrà considerarla, in questa fase, come una vera e propria scienza fisica... Nessuna definizione nei primordi dell'insegnamento: suscitare l'idea coll'immagine concreta dell'oggetto e andare avanti. Lo so che queste sono norme pedagogiche che hanno tanto di barba; ma io mi domando quand'è che le abbiamo seguite sul serio nell'insegnamento della matematica. E anche nelle scuole superiori andare cauti, cauti, cauti colle disquisizioni sui principi. ...*

Severi F., 1919, "La matematica", *Energie Nove*, Serie II, n. 9, Torino.

* *le diverse parti del cervello umano funzionano a velocità differenti e gli oggetti vengono riconosciuti da una parte del cervello, mentre il moto viene rilevato da un'altra. Ciò significa che quando vediamo una persona in movimento, le due sezioni del cervello riconoscono separatamente moto e persona, mentre una terza parte unisce i due segnali... L'aspetto interessante e che le due zone del cervello funzionano a velocità sensibilmente diverse, e quella che riconosce il moto è molto più rapida. Immagino che l'origine di questa caratteristica sia sempre di carattere evolutivo: per un umano nella giungla è più importante riconoscere rapidamente se qualcuno si muove, piuttosto che riconoscere chi si muove - che sia una tigre, un leone o un serpente.*

Atiyah M. F., 2007, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo, p.13.

* *Il disegno deve contribuire al fine generale dell'insegnamento, che è quello di procurarsi idee chiare.*

Pestalozzi E., in Silber, K. 1965, *Pestalozzi: The man and his work* 2e, Routledge and Kegan Paul, London.

* *Ogni insegnante dovrebbe seguire un Corso di disegno.* **de Finetti B.**

* *Che un elemento affettivo sia parte essenziale di ogni invenzione è sin troppo evidente, e molti pensatori vi hanno già insistito; è chiaro che nessuna scoperta o invenzione significativa può aver luogo senza la "volontà" di scoprire. Ma con Poincaré vediamo qualcosa d'altro, vediamo l'intervento del senso della bellezza come "mezzo" indispensabile alla scoperta. Abbiamo così raggiunto una doppia conclusione: l'invenzione è scelta. Questa scelta è governata perentoriamente dal senso della bellezza scientifica. ...*

Hadamard J., 1993 (1945), *La psicologia dell'invenzione*, Cortina, Milano, 1993 (1945), p. 29 e p. 152.

* *Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere "belle", le idee, come i colori e le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale ... E' senza dubbio molto difficile "definire" la bellezza matematica, ma questo è altrettanto vero per qualsiasi genere di bellezza. Possiamo anche non sapere che cosa intendiamo per "bella poesia", ma questo non ci impedisce di riconoscerne una quando la leggiamo.*

Hardy G. H., 1989, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, p. 67.
** la matematica, giustamente considerata non contiene soltanto la verità, ma la bellezza suprema…*

Russell B., 1964 (1918), *Lo studio della matematica*, in *Misticismo e logica e altri scritti*, Longanesi, Milano, p. 81.
** Noi pensiamo in termini geometrici … L'intuizione geometrica guida i nostri pensieri e suggerisce nuovi risultati. La geometria è sempre stata una sorgente fertile di nuove idee e da lei sono nate discipline matematiche complete … usiamo la geometria … come un modo di pensare. Noi dipendiamo in modo determinante dai nostri occhi e spunti importanti riusciamo a trasformarli in diagrammi geometrici …*

Engel A.,1972, L'insegnamento della probabilità nelle scuole medie, *L'ins. della Mat.*, vol. 3, n. 2-3-4, pp. 53-110.
** La nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dar corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi, di carattere generalmente non per se stesso geometrico, ma statistico, economico ecc.; è insomma, per così dire, la dottrina dello schema mentale adatto per afferrare intuitivamente tutti i problemi pratici la cui impostazione scientifica richiede lo strumento matematico.*

de Finetti B., 1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese, p. 256.
** … la concretezza delle immagini concorrono allo scopo di persuadere che la matematica non è un meccanismo a sé da sostituire al ragionamento, ma è la ragionevole base e prosecuzione dell'ordinario ragionamento.*

de Finetti B., 1959, *Matematica Logico Intuitiva*, Cremonese, p. XII.
** Ciò che colpisce, …, è questa sembianza di illuminazioni improvvise, segni evidenti di un lungo lavoro inconscio precedente; il ruolo di questo lavoro inconscio nell'invenzione matematica mi sembra incontestabile.*

Poincaré H., 1913, Conferenza alla Société de Psychologie di Parigi. Mathematical Creation, in *The Foudation of Science*, The Science Press, New York, e in *Science et méthode*, 1908, Flammarion, Paris, poi in Oevres, vol. VI, tr. It. di C. Milanesi, in *Opere epistemologiche*, vol.II, pp. 35-45, nota 14.
** L'induzione e l'analogia, sono i principali mezzi per raggiungere la verità.*

de Laplace P. Simon, 1951 (1814), *Saggio filosofico sulle probabilità*, Laterza, p. 41.
** Non esiste - si può dire - alcun problema che non ammetta, seppure non lo esiga, di essere prospettato in uno spazio a più dimensioni.*

de Finetti B., 1970, *Teoria delle probabilità*, Einaudi, p. 535.
** La mancanza della diretta intuizione visiva nell'andare oltre le tre dimensioni non è da tale punto di vista un ostacolo meno esteriore e contingente di quanto la mancanza di dita nell'estendere la definizione di numero oltre il dieci.*

de Finetti B.,1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese, p. 261.
** Uno dei più insidiosi pregiudizi del nostro secolo è quello che un concetto debba essere definito con precisione per aver senso, o che un ragionamento debba essere comunque presentato a rigor di logica matematica. … Persino dal punto di vista del buon senso, l'ideale della precisione ci appare assurdo. I nostri ragionamenti quotidiani non sono affatto precisi, ma raggiungono il loro scopo. La natura stessa, dall'universo al gene, è approssimata e imprecisa … Confondere la matematica con l'assiomatica e come confondere la musica di Vivaldi con le tecniche di contrappunto dell'età barocca.*

Rota G.C., 1999, *Lezioni napoletane*, Ed. La città del Sole, pp. 44-6.

Non mi sembra che il linguaggio, scritto o parlato, abbia alcun ruolo nel meccanismo del mio pensiero. Le entità psichiche che sembrano servire da elementi del pensiero sono piuttosto alcuni segni e immagini più o meno chiari che possono essere riprodotti e combinati "volontariamente". Ovviamente, sussiste una relazione di un qualche tipo fra questi elementi e i concetti logici pertinenti. E' anche chiaro come alla base del gioco piuttosto vago di tali elementi si trovi il desiderio di arrivare infine a concetti logicamente connessi tra loro. Ma da un punto di vista psicologico, questo gioco combinatorio sembra essere il tratto caratteristico del pensiero produttivo - prima che ci sia alcuna connessione con la costruzione logica in parole o in altri segni che si possano comunicare ad altri. Gli elementi sopra menzionati sono, nel mio caso, di tipo visivo, e a volte muscolare. ...

Eistein A., In **Hadamard J.**, 1993 (1945), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*. Raffaello Cortina Editore, p. 129.

* *Domani quando per calcolare un'area sarà molto più rapido e conveniente usare un "metodo di Montecarlo" anziché, ad esempio, calcolare l'integrale, la definizione di area sarà sempre quella di Peano-Jordan (o anche di Lebesgue) o non, piuttosto, quella che può darsi mediante un'interpretazione probabilistica del concetto di area?*

E sarà conveniente fondare l'elettrostatica e tante teorie della Fisica e della Meccanica, anche classiche, su leggi costitutive quale, ad esempio, quella di Coulomb che non, piuttosto, su principi probabilistici i quali, mettendo da parte il metodo delle equazioni differenziali, forniranno metodi di calcolo più rapidi e potenti?

Fichera G., 1993, Il calcolo infinitesimale alle soglie del duemila, *Rend. Suppl. Acc. Lincei*, s. 9, v. 4, p. 69-86. Conferenza tenuta nella seduta a Classi riunite dell'Accademia dei Lincei (13 III 1993).

* *"Degradazione" liberatrice* [è il titolo dell'ultimo capitolo del libro di de Finetti: *Il saper vedere in matematica*].

[Può essere utile] *"degradare" a cose utili comprensibili famigliari divertenti appetibili ciò che viene usualmente rivestito di forme pure solenni accademiche ed ermetiche.*

(Suol dire spiritosamente un collega che quando il professore si accinge a spiegare i numeri reali secondo la moda liceale sente l'obbligo di mettersi la cravatta nera). Questa opera di degradazione - che è piuttosto di demistificazione - contribuirà ad una spinta liberatrice necessarissima in tutta la cultura.

Per illustrare tale idea in forma adeguatamente non accademica, basti riportare due passi felicissimi di una critica teatrale (sulla recita di "Androclo e il leone" di Shaw a Ostia Antica) di Sandro de Feo (su "L'Espresso", 25-VII-1965).

Egli depreca con ragione gli "scritti seriosi, musoni e corrucciati, di quel profondismo tutto formale e scolastico che incredibilmente ancora resiste in Europa e risale nientemeno alla retorica, dominante nel mondo antico, del "sermo sublimis" e del "sermo humilis", secondo cui nessuna storia, nessun dramma potevano essere presi sul serio e compresi nel novero delle cose nobili e profonde se non erano rivestiti di nobili forme e di discorsi e ragionamenti solenni". Occorre invece reagire, mischiare e scompigliare le carte. E infatti "fu il sentimento e la poesia del cristianesimo a mischiare e scompigliare le carte della stanca, sussiegosa retorica degli antichi, rivestendo di "sermo humilis", di parole terra terra e, all'occorrenza, di puerilità farsesche le passioni più alte e i pensieri sublimi; e fu un grande santo cristiano, san Francesco, ad aggiungervi un grano di folle allegrezza. E l'intuizione di Shaw, nelle molte sue commedie in cui è questione esplici-

tamente o velatamente e allegoricamente di santi, discende da questa tradizione e rivoluzione della poesia e del realismo moderni".

[fine del libro (bellissimo e tradotto in molte lingue)]

de Finetti B., *1967, Il saper vedere in matematica, Loescher, p. 60.*

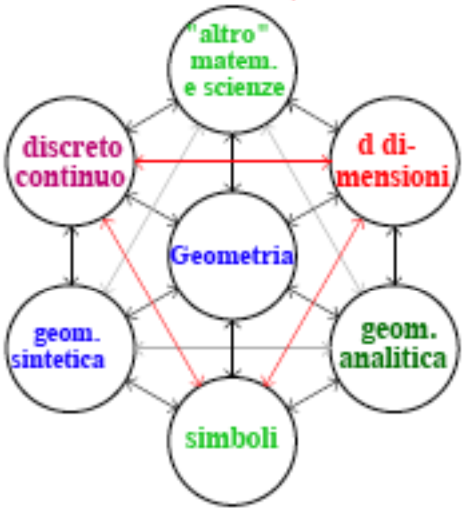
* *Geometry is gradually coming back into school syllabus [17], but so far only 2-dimensional geometry. I would like to make a case for including some 3-dimensional geometry as well, because the latter is vital for describing the world throughout science, engineering and architecture. Higher-dimensional geometry also comprises a major part of modern research within mathematics itself. Also 3-dimensional geometry fosters both our intuitive understanding and our geometric imagination. It teaches us to see things in the round. It also trains us to see all sides of an argument simultaneously, as opposed to algebra and computing which emphasise thinking sequentially.*

Sir Zeeman C., 2005, *A supplement to The Mathematical Gazette*, The Mathematical Association [MA], March 2005.

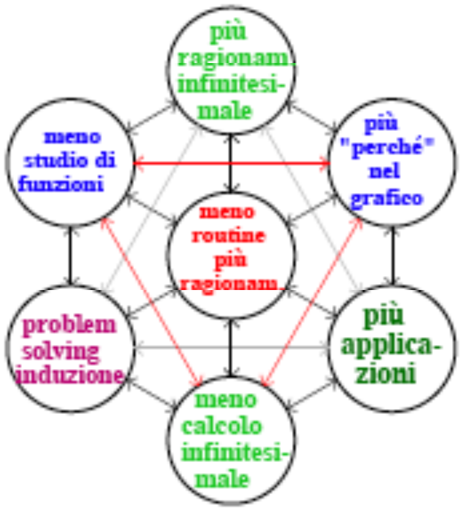
* *L'educazione non deve limitarsi a perpetuare da una generazione all'altra l'ordine esistente, deve invece elaborare modelli di vita nuovi e alternativi.*

Rousseau J.J., 1762, *Contratto sociale.*

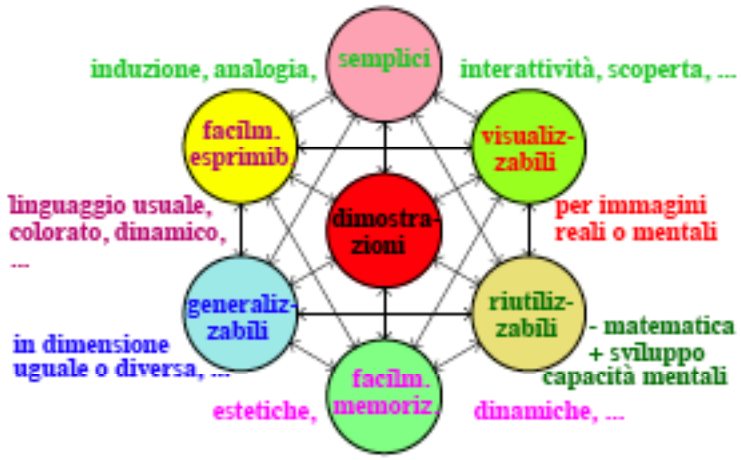
Fusionismo: Klein, de Finetti



Matematica



Ricerca didattica, utilità sociale e dimostrazioni matematiche



[I cristalli di neve disegnati con Cabri si trasformano, cambiando aspetto con continuità:]

Il "movimento continuo" effettuato "*a caso*" o con alcune tecniche

In conclusione, una domanda: perché parlare molto di *Cabri II Plus* (o di un suo analogo)? Perché rispetto a *Cabri 3D*, a *Matematica* o ad altri software più complessi può accompagnarsi meglio alla filosofia del *problem solving*. Con Cabri II *sei tu* che devi ottenere un risultato, non puoi limitarti a chiederlo al software. In particolare in Gabri II il "movimento che cambia le forme" è realizzabile molto facilmente permettendo la semplice realizzazione di opere d'arte personali[17]. Si tratta sia di un movimento effettuato parzialmente *a caso* per verificare e approfondire in modo induttivo e deduttivo le proprietà di una ipotesi con il *dragging*, (**Arzarello et al.**, 2002), sia di un movimento ottenuto attraverso delle tecniche, come accade per: *affinità*, *aperture*, *radialità*, *rotazioni*, *tassellazioni* semplici e *pulsanti*, *sezioni* di più oggetti da accostare, *proiezioni*, *equiscomponibilità continua e per traslazione*, *Tangram nello spazio*, ..., traducibili a volte in giochi e costruzioni di legno,[18] utili per comprendere le potenzialità del materiale concreto, per riconsiderare l'importanza del calcolo infinitesimale a favore del ragionamento infinitesimale, e per ottenere nuove proprietà e teoremi possibilmente "più adatti" didatticamente. Si può cominciare da una versione "dinamica ed infinitesimale" del Teorema di Pitagora,[19] passando per una valo-

[17] Un esempio molto significativo, il film: *Il magico mondo di Cabri*, realizzato, assieme ai suoi studenti, da Maria Carla Palmeri, un'insegnante di scuola media di Firenze che spero scriverà presto un articolo in proposito. Mentre la società ci sta *scippando la bellezza, loro la ricostruiscono personalmente.*

[18] Barra M., 2009, Problem-solving, fusionismo e traduzioni fra linguaggi diversi. Varie formule autocostruibili per sommare i quadrati o i cubi degli interi. Generalizzazioni originali per sommare le potenze degli interi attraverso i Numeri Euleriani e i "Box-Numbers", *Progetto Alice*, N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, 65 - 96 e Barra M., 2009, Numeri Euleriani, Box-numbers, Numeri di Stirling di seconda specie e Triangolo Aritmetico di Pascal per ottenere le somme delle potenze degli interi. Approfondimenti e collegamenti, *Progetto Alice*, N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, 97-115.

[19] Barra M., 2008, Matematica e software di geometria dinamica, *Pr.Alice*, n.25, V.9, 193-233.

rizzazione di Archimede, esaltandone la grandezza, ma anche umanizzandola (forse anche Lui, almeno in una circostanza sembra voler salire *su uno sgabello*[20] (certo, lo sto facendo anch'io e scusate il confronto improponibile)), per arrivare ad argomenti attuali, con la possibilità di affrontarli, in alcuni casi in modo originale, con Cabri.

Questi vari temi, quasi tutti collegati in un unico argomento, per me sono affascinanti. Li ho spesso ideati seguendo le indicazioni didattiche di alcuni nostri grandi maestri.

Per non rimanere nel vago faccio un esempio che pubblicherò, almeno in parte, fra breve: riguarda il dodecaedro rombico,[21] D^3. Rappresenta la proiezione di un ipercubo quadrimensionale C^4 nel nostro spazio (quindi tutte le proprietà dell'ipercubo debbono tradursi in proprietà di D^3) ed è collegato ai "tetraedri fattoriali" [nota 18]. Inoltre D^3, che tassella "ovviamente" lo spazio, come i C^4 in R^4, genera anche un nuovo solido[22] che tassella anch'esso lo spazio. D^3 ha le stesse caratteristiche di uno gnomone e per questo si incontra nuovamente, in modo inizialmente impensabile, nel collegamento fra i numeri dei suoi costituenti e i coefficienti dei tetraedri che determinano geometricamente e in generale la somma di tutte le potenze degli interi. Sempre D^3 è infinitamente equiscomponibile per traslazione delle sue parti che si modificano con continuità, con i *cubi allungati*, [23] che sono originati in generale da cubi nei quali una diagonale viene dilatata in modo affine secondo $\sqrt{d+1}$ ove d è la dimensioni del cubo. Ovviamente, anche i cubi allungati tassellano lo spazio e le aggregazioni delle sue porzioni, che si modificano e che sono sempre formate, sia nel continuo, sia nel discreto[24],

[20] Ne farò presto un articolo cercando anche di corroborare l'ipotesi, per molti banale, che Archimede è il più grande matematico della storia.

[21] Barra M., 1997, Geometria dello spazio, testo di lezioni e seminari tenuti al 2° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica, per la Sezione Scuola Media, dal titolo:"l'insegnamento della geometria dello spazio" tenuto a Viareggio dal 26/02 al 2/03 96, quaderno 19/, MPI (Direzione Classica)-UMI, 111-146.

[22] Barra M., 2006, Ombre di cubi in dimensioni qualsiasi e un nuovo solido che tassella lo spazio, in *Atti del XXV Congresso UMI – CIIM, Acireale 2004, Notiziario dell'UMI, XI 2006*, 58 - 60.

[23] I cubi allungati in tre dimensioni sono formati da un ottaedro regolare con due tetraedri regolari attaccati su due facce opposte (facendo aderire le sezioni di C^4 illustrate nella seconda pagina prima di questa). Si possono scomporre in una infinità continua di modi con il dodecaedro rombico e le parti nelle quali si dividono, si corrispondono per traslazione. In dimensione due, si tratta di un esagono regolare (proiezione di un cubo, ad es. di spigolo unitario, nella direzione di una sua diagonale principale, su un piano ad essa perpendicolare) e di un rombo formato da due triangoli equilateri (lati di lunghezza $\sqrt{2}$ …), con lo stesso tipo di scomponibilità continua.

[24] Ad esempio, ciascuno dei coefficienti binomiali del Triangolo di Pascal, oltre ad indicare il numero di punti contenuti in un tetraedro, indicano anche il numero di punti contenuto in un tetraedro tronco.

da tetraedri tronchi, determinano delle *tassellazioni pulsanti* dello spazio medesimo, fornendo un modo semplice per ottenere le *box-spline* e molte loro proprietà, anche inedite, che si collegano nuovamente alla probabilità, ai Numeri Euleriani utilizzati per le somme delle potenze degli interi, che, sempre in collegamento con D^3, danno origine anche a dei "nuovi numeri" che ho chiamato *box-numbers* (Barra, 2009, pp. 65-115), che sono collegabili ai *quasi-cubi*, ai *simil-cubi*, ed ai *cubi fattoriali*, tutti scomponibili in tetraedri uguali a quelli già visti, …

Tutto questo ha una traduzione in qualsiasi dimensione, in geometria e molto spesso nel calcolo delle probabilità, e si collega alla teoria dei numeri, all'analisi numerica, …, richiedendo a volte alcune scelte utili didatticamente diverse da quelle effettuate nella tradizione matematica.

Quanto è stato selezionato per creare dei collegamenti esplode in un mare di matematica semplice e interessante, e non c'è mai tempo per mostrarla tutta.[25]

Si tratta di un esempio di *fusionismo olistico* (*o globale*) che rende ciascun argomento più "bello", almeno per chi si inoltra fantasticando nella contemplazione degli argomenti e dei loro collegamenti, spesso ad occhi chiusi, divertendosi, …, lo rende più ricco di proprietà esprimibili anche verbalmente e graficamente, e più facilmente memorizzabili rispetto ad una loro trattazione improntata in modo opposto, attraverso la filosofia del *purismo*.

Infine, ascoltiamo quanto segue, e facciamolo capire in modo convincente e induttivo ai giovani, cercando però di nasconderlo al ministro al ministro:

Se il ministro sapesse quanto ci divertiamo noi matematici con il nostro lavoro, sicuramente ci ridurrebbe lo stipendio.
Mikhail Gromov, Premio Abel 2009.

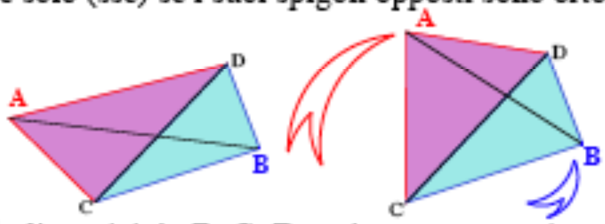
Molti degli argomenti indicati sono "dovuti" a Cabri.[26]

[25] Ho iniziato a parlarne nel 1987 a Torino, al *XIII Congr. Nazionale UMI* e continuerò a parlarne.

[26] Barra M., 2007, Innovative aspects of dynamic geometry software, *La matematica e la sua didattica*, Anno 21, n. 1, 81-86; e Barra M., Conte S., Ruffino Aprile M., 2001, *Creatività in matematica a scuola: una sfida possibile?*, Ed. Pagine, pag 186; e Barra M., 2004, The importance of the use of didactic, new technological materials in mathematics classrooms and how this "participating environment" can improve mathematical learning and teacher's practice, *Acts of the 20th Panhellenic Conference on Mathematics Education, organized from the Hellenic Mathematical Society*, November 7-9, 2003, pp. 649-659; e Barra M., 2005, Importance of the use of didactic, new technological materials in mathematics, *in Atti del Convegno CIEAEM 57: Changes in Society: a Challenge for Mathematics Education, Pubblicato su:* *http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_barra.pdf*. Alcuni argomenti sono illustrati in: *Atti di Cabri World 2004* (Roma, 9-12 settembre 2004) di prossima pubblicazione.

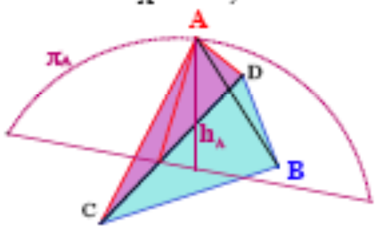
Dimostrazione "in movimento": un esempio

Teorema 1): un tetraedro è ortocentrico (ha le altezze che si incontrano in un punto) se e solo (sse) se i suoi spigoli opposti sono ortogonali

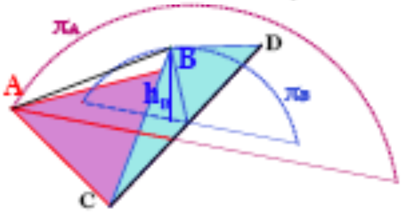


Un tetraedro T^3, di vertici A, B, C, D, può essere costruito a partire dai due triangoli, CDA e CDB, che ruotano intorno al lato comune, CD, aggiungendo il segmento che unisce A e B.

- considerimo il piano π_A passante per A perpendicolare a CD e quindi[27] a CDB: questo contiene l'altezza h_A di T^3;



- considerimo anche il piano π_B passante per B perpendicolare a CD e quindi a CDA: questo contiene l'altezza h_B di T^3;



le altezze h_A e h_B (non parallelele) si intersecano sse i piani paralleli π_A e π_B (perpendicolari a CD) coincidono; ma se π_A e π_B coincidono contengono lo spigolo AB che dunque è perpendicolare a CD sse h_A e h_B si intersecano.

Così, ripetendo il ragionamento, le quattro altezze, h_A, h_B, h_C e h_D si incontrano a coppie sse gli spigoli opposti di T^3 sono perpendicolari.
Ma, ad es., le prime tre altezze, non essendo complanari e quindi non potendo formare un triangolo, si incontrano a coppie sse hanno un punto in comune, lo stesso per le ultime tre, e il punto in comune di queste deve coincidere con il precedente perché h_B e h_C appartengono ad entrambe le terne.

[27] Il pavimento è perpendicolare all'asse dei cardini di una porta sse la porta gira, cioè sse è perpendicolare alla porta in tutte le sue posizioni (bastano 2), così un piano è perpendicolare ad una retta sse è perpendicolare a tutti i piani contenenti la retta (bastano 2).

Bibliografia

AA.VV., 1952, *The Creative Process*, University of California, The New American Library.

Accascina G., Barra M., Bernardi C., Menghini M., 2006, Movimento, percezione e dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 29 A-B, n. 4, pp. 313-346.

Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., Robutti O., 2003, *Matematica 2001 - Raccolta di attività di supporto curriculare per la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado*, pag 504, e 2004. *Matematica 2003 - Raccolta di attività di supporto curriculare per la scuola secondaria di secondo grado*, entrambe pubblicazioni MIUR, protocollo d'intesa UMI-SIS-MIUR, pag 532.

Arzarello F., Olivero F. Paola D., Robutti O., 2002, A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Did. der Math.*, v. 43, n. 3, pp. 66-72.

Barra M., 1975, The cycloid - A didactic Experience - A new proof, *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 93-98.

Barra M., 2001, Ipersolidi e altri argomenti, *Progetto Alice*, N. 5, Vol. 2, Ed. Pagine, pp. 191-246.

Barra M., 2003, The importance of the use of didactic, new technological materials in mathematics classrooms and how this "participating environment" can improve mathematical learning and teacher's practice, *Acts of the 20th Panhellenic Conference on Mathematics Education, organized from the Hellenic Mathematical Society*, November 7-9, 2003, pp. 649-659.

Barra M., 2009, Manipulation of virtual objects for the development of connections between geometry and probability as well as between the various dimensions of space. *Proceedings of Gordon's Bay Delta '09, 7th Southern Right Delta (ΣΡΔ'09) Conference On The Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, Mathematics in a dynamic environment*, pp. 10-25.

Bartolini Bussi M. L., Margotti M. A., 1999, Semiotic mediation: from history to the mathematics classroom, *For the Learning of Mathematics*, 19, pp. 27-35.

Butterworth B.,1999, *Intelligenza matematica*, Ed. RCS Libri, S.p.a., Milano.

Castelnuovo E., Barra M., 2000 (1976), *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino, Trad.: *La mathématique dans la réalité*, CEDIC Ed., 1980, e Nathan Ed., 1986.

Catastini L., 1990, *Il pensiero allo specchio*, La Nuova Italia, Firenze.

Coxeter H.S.M.,1963 (1948), *Regular Polytopes*, The Macmillan Company, New York.

de Finetti B., 1973, La conferenza di Polya a Roma: *deviner et démontrer*. Periodico di Matematiche, 49, n.1-2, 1973, p. 77-86.

Furinghetti F., Paola D., 2003, To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study, *Proceedings of PME 27*, v. 2, pp. 397-404.

Hardy, G. H., 1992, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press.
Kleine F., 2004 (1939), *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, Geometry, Dover Publications.
Laborde C., 2000, Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 151-161.
Lakatos I., 1979 (1976), *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta scientifica*, Feltrinelli, Milano.
Lakatos I., 1985, *Matematica, scienza ed epistemologia. Scritti filosofici.* Il Saggiatore, Milano.
Mariotti A., 2002, Technological advances in mathematics learning, in *Handbook of International Research in Mathematics Education*, pp. 695-723, Lawrence Erlbaum, Mahwah, New York.
Paola D., 2008, La costruzione di significato in classe: una sfida per l'insegnante, in *Didattica della Matematica e Azioni d'aula* (a cura di D'Amore B. e Sbaragli S.), Pitagora, Bologna, pp. 57-64.
Poincaré H., 1902, Du role de l'intuition e de la logique en mathématiques, in *Compte Rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens* (Paris, 1900), Gauthier-Villars, Paris.
Polya G., 1954, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton Un. Press.
Polya G., 1967, *Come risolvere i problemi di matematica*, e 1971, *La scoperta matematica*, 2 voll., Feltrinelli, Milano.
Russell B., 1964, *Lo studio della matematica*, in *Misticismo e logica e altri scritti*, Longanesi.
Wertheimer M., 1965, *Il pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, Firenze.

Un breve excursus storico sulla scrittura dei numeri per un avvio naturale alla notazione delle cifre decimali

di Domenico Lenzi [*] e Cosimo De Mitri [*]

Sunto. In questo articolo, dopo una carrellata storica sulla scrittura dei numeri in diverse civiltà, si riprende una proposta fatta in [4] sui primi approcci alla scrittura delle cifre decimali, approfondendo il discorso e fornendo un ulteriore contributo che riteniamo possa risultare utile.

L'impostazione che si presenta vuol essere un percorso complementare, e non certo alternativo, rispetto ad altre attività didattiche finalizzate allo stesso scopo.

Qui, come in [4], per avviare in modo naturale i bambini alla scrittura delle cifre decimali da 1 a 9 – alleviando così alcune delle difficoltà mnemoniche, spesso deleterie, connesse con i primi apprendimenti matematici – usiamo per ogni cifra da rappresentare una quantità di fiammiferi corrispondente a essa, e disponiamo i fiammiferi in modo tale da formare una figura che ricordi la scrittura usuale della cifra stessa. Quindi per il passaggio alla scrittura standard sarà sufficiente una semplice deformazione della scrittura proposta qui, una volta che quest'ultima sia stata fatta propria dall'alunno.

Inoltre, affinché l'allievo abbia una percezione immediata dei raggruppamenti costituiti da quattro o da cinque fiammiferi – dopo averne preso coscienza attraverso il conteggio – usiamo per essi rispettivamente i colori azzurro e rosso (senza alcun riferimento all'uso dei numeri in colore di Georges Cuisenaire).

Quindi nell'attività proposta il colore svolge un importante ruolo evocativo: quando viene usato l'azzurro o il rosso, il bambino saprà di trovarsi di fronte a quattro o a cinque fiammiferi, senza avere la necessità di contarli. Così come, di fronte a un certo tipo di banconota grigia, un adulto capisce che si tratta di cinque euro, senza dover leggere il numero e senza che sulla carta-moneta siano raffigurate cinque monete da un euro.

È chiaro che il colore rosso servirà anche per rappresentare cinque fiammiferi in tutte le cifre da *sei* a *nove*. Ovviamente, nel *nove* compariranno anche quattro fiammiferi azzurri. Di ciò daremo esempio in una tavola riportata in ultima pagina dopo la Bibliografia.

Perché si comprenda fino in fondo il senso della nostra proposta, giova tener presente che per gli scolari il problema di memorizzare la notazione delle cifre numeriche si presenta insieme a quello di memorizzare i vari modi di rappresentare le lettere dell'alfabeto: minuscole, maiuscole, corsive (con i vari abbinamenti). Onde alcune forme di dislessia, disgrafia e discalculia potrebbero dipendere, oppure essere accentuate, da difficoltà di carattere mnemonico. Perciò siamo convinti che una semplificazione della scrittura delle cifre numeriche potrà rivelarsi senz'altro utile.

1. Premessa.

La matematica è una delle materie meno amate al mondo, a parte qualche significativa eccezione che caratterizza alcune nazioni asiatiche quali l'India, il Pakistan, la Cina e

[*] Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento – 73100Lecce.
domenico.lenzi@unisalento.it cosimo.demitri@unisalento.it

poche altre ancora. Tant'è vero che ormai in molti paesi occidentali – soprattutto negli Stati Uniti d'America – studiosi di questa disciplina sono stati assunti dall'estremo oriente per far fronte alle deficienze di carattere scientifico che si avrebbero se non si ricorresse a quegli apporti.

La matematica, sulla cui importanza quasi tutti sono d'accordo, spesso è misteriosa per la gran parte degli individui; e la causa di ciò risiede principalmente nel fatto che il suo insegnamento – a prescindere dalle numerose e lodevoli eccezioni – viene impartito in modo inadeguato e poco attento alle esigenze e alle reali potenzialità dei discenti. Ed è grave che ciò avvenga già a partire dai primi approcci alla disciplina, con la messa in atto di interventi astrusi e ingiustificati; laddove invece basterebbero poche e semplici attività per avviare i fanciulli a un apprendimento consapevole e sereno, come per esempio normalmente avviene – a parte i casi di dislessia e disgrafia – nell'apprendimento della lettura e della scrittura.

Chissà che un insegnamento della matematica depurato di alcuni aspetti "vessatori" e più attento al carattere razionale della disciplina non consenta ai nostri ragazzi di ritrovare il gusto della scoperta e di riappropriarsi delle loro facoltà critiche.

2. Alcuni richiami storici sulle rappresentazioni numeriche.

Nel corso dei secoli i numeri sono stati rappresentati in vario modo. Qui di seguito ne diamo qualche esempio.

a. In India – come in altre civiltà (in seguito presenteremo due casi che riguardano la civiltà cinese) – si sono succeduti diversi tipi di rappresentazione numerica.

Noi ricordiamo la notazione Kharosthi – formatasi, intorno al V secolo a. C., nel Nord Ovest dell'India – in cui i numeri dall'*uno* all'*otto* erano rappresentati così:

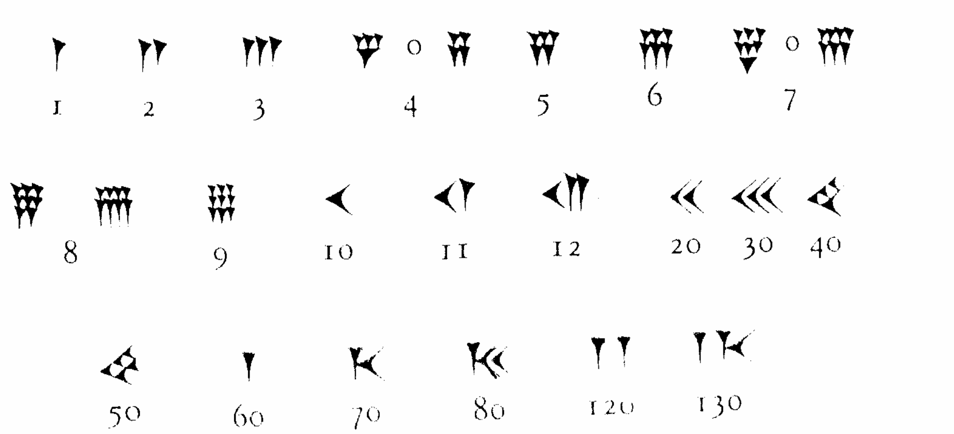
I	II	III	X	IX	IIX	IIIX	XX
1	2	3	4	5	6	7	8

Si noti la perspicacia con cui nel simbolo **X**, incrociando due segmenti, sono stati realizzati quattro bracci.

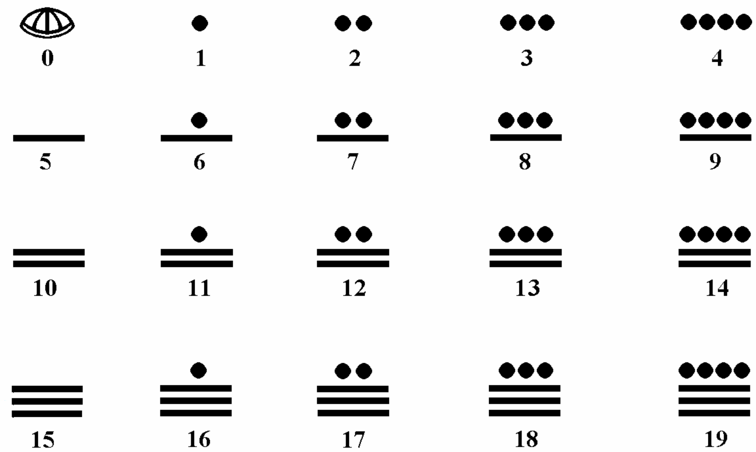
Intorno al III secolo a. C., la notazione Kharosthi fu in parte soppiantata da quella Brahmi, che la mitologia indiana considera suggerita, insieme all'omonimo linguaggio, dalla divinità Brahma. Inizialmente, nella notazione Brahmitica i numeri *uno*, *due* e *tre* furono rappresentati come nel caso Kharosti; invece **X**, **IX**, **IIX** e **IIIX** diventarono rispettivamente **+**, h, una specie di φ e un segno che ricorda il nostro *sette*. In seguito le sbarrette di *uno*, *due* e *tre* divennero orizzontali. Per numeri più grandi di *sette* erano usati altri tipi di segni.

Pare che la cultura matematica brahmitica sia stata influenzata notevolmente da quella Mesopotamica, anche per quel che riguarda l'introduzione dello *zero*; forse in seguito ai tentativi di Alessando Magno di conquistare l'India, nonostante il suo poderoso esercito si sia fermato sulle rive dell'Indo. Ma giova ricordare che a quei tempi spesso con un esercito si muoveva un'intera popolazione, comprendente famiglie di soldati, addetti alla logistica, donne *di facili costumi*, ma anche uno stuolo di consiglieri e di saggi. Ed è verosimile che i saggi macedoni siano riusciti ad avere contatti significativi con la cultura indiana.

b. Una forma di scrittura dei numeri abbastanza vicina a quella odierna risale al periodo – quasi 5000 anni fa – dei Sumeri, in Mesopotamia (più o meno l'odierno Iraq). Presso quel popolo era in uso un sistema di rappresentazione numerica che è un lontano parente della nostra rappresentazione decimale, in cui noi raggruppiamo le unità in decine, le decine in centinaia, ecc. Infatti i Sumeri raggruppavano le unità di sessanta in sessanta, ma anche di dodici in dodici. Di ciò attualmente è rimasta traccia nell'*ora*, che è costituita da 60 minuti primi, che a loro volta sono costituiti da 60 minuti secondi; senza dimenticare le nostre "dozzine", e il fatto che 12 mesi vengano raggruppati in un anno e la mezza giornata sia costituita da 12 ore.
I Sumeri intorno al 2500 a.C. furono sottomessi dagli Akkadi, i quali forse ereditarono da quelli alcuni aspetti della loro numerazione, che però migliorarono avvicinandola ancor più a quella che sarebbe stata la nostra.
Gli Akkadi al posto del nostro **1** usavano un simbolo abbastanza vicino al segno ▼, però un po' più stretto e leggermente incurvato. Questo era uno dei tanti segni cuneiformi degli Akkadi.
Qui sotto presentiamo i segni numerici fondamentali accadici, dai quali emerge una sorta di rappresentazione di tipo decimale per i numeri più piccoli di sessanta, e di tipo sessagesimale per i numeri dal sessanta in su [si osservi il ruolo che il segno del sessanta gioca nei numeri più grandi di lui].



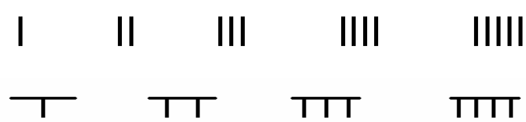
d. Presso i Maya – una civiltà pre-colombiana sviluppatasi a sud dell'attuale Messico – veniva usato un metodo di rappresentazione numerica a base vigesimale (base venti), le cui cifre erano espresse in modo molto semplice ed efficace (si veda la figura sottostante).
Come si può vedere, presso i Maya c'erano due segni che rappresentavano – usate additivamente – le cifre da *uno* a *diciannove*: ● per il nostro **1** e ▬▬ per il nostro **5**. Inoltre, c'era anche un segno per lo *zero*, costituito da un occhio socchiuso o da una spirale, ma anche da un guscio vuoto oppure da una conchiglia vuota. Però lo *zero* non svolgeva un ruolo di tipo posizionale come nella nostra rappresentazione. Esso serviva a segnalare la fine della scrittura di un numero. Invece, l'analogo del valore posizionale di una cifra era espresso mediante un segno particolare (si veda [2], nota (1) a pag 147).



c. Tuttora in Cina, quando non si usa il sistema decimale, al posto dei nostri usuali numeri da **1** a **10** ci si serve dei seguenti segni – che risalgono al terzo secolo a. C. – al di sotto dei quali riportiamo il nostro modo di rappresentarli e i corrispondenti modi di trascriverli nei caratteri latini:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
yi	er	san	sì	wu	liù	qi	ba	jiu	shì

Come si può vedere, per ciascuno dei loro primi dieci numeri i cinesi usano un suono unico, quasi una sillaba, il che li aiuta nella memorizzazione, dato che li enunciano come se fossero un'unica parola: **yi-er-san-sì-wu-liù-qi-ba-jiu-shì**. Un po' come se noi per i primi dieci numeri usassimo la parola **pre-ci-pi-te-vo-li-ssi-me-vol-men(te)**, in cui abbiamo separato i vari grafemi che potrebbero surrogare gli usuali numerali.
Successivamente, durante la dinastia Han, in Cina (2° sec. a.C. – 3° sec. d.C.) fu usato anche un metodo di rappresentazione con base decimale, in cui le cifre da **1** a **9** erano rappresentate così:



Può sorprendere il fatto che le cifre da 6 a 9 richiamino quelle della rappresentazione Maya presentata precedentemente, in cui i pallini sovrapposti a una linea sostituiscono le barrette verticali poste dai cinesi al di sotto del segno ——. Ma, in realtà, nella rappresentazione Han la sbarra orizzontale del sei non ha carattere additivo ed è un tutt'uno col *dentino* sottostante; tant'è vero che, se il segno del *sei* lo si capovolge, esso rappresenta il *sessanta*. Secondo alcune fonti, il segno —— rappresentava il dieci; inoltre, due, tre, quattro, cinque di questi segni sovrapposti rappresentavano rispettivamente i nostri 20, 30, 40, 50; invece le decine dal *settanta* al *novanta* si indicavano riportando al di sotto del *sessanta* rispettivamente una, due, tre volte il segno ——.

d. I Romani per i numeri usavano una rappresentazione abbastanza semplice, basata su alcuni segni numerici fondamentali che venivano adoperati in modo additivo, dal più grande al più piccolo, con una piccola eccezione nella quale si può ravvisare una traccia di posizionalità. Infatti un segno numerico poteva precederne uno di valore maggiore, ma in tal caso i due andavano a costituire un unico segno, il cui valore si otteneva sottraendo il numero più piccolo a quello più grande. Per il resto si procedeva additivamente.

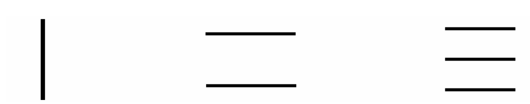
Come è noto, il segno I rappresentava l'unità. I segni fondamentali successivi erano V, X, L, C [e qualche altro], che rappresentavano rispettivamente i nostri **5**, **10**, **50** e **100**. Ad esempio, per quanto è stato detto risulta:

I	II	III	IV	V	XL	XLI	XLIV	L	XC
1	2	3	4	5	40	41	44	50	90

Tuttavia, inizialmente il *quattro* si rappresentava così: **IIII**. Però, essendo arduo proseguire ulteriormente con le sbarrette verticali, per la difficoltà di distinguere immediatamente i diversi numeri rappresentati, il segno **V** può essere derivato dall'accostamento di due sbarrette oblique che si incontravano nel punto più basso, senza che ci sia stata necessariamente l'intenzione di riferirsi alla corrispondente lettera dell'alfabeto. Invece **X** può aver avuto – come in altre situazioni – un valore duale [1] rispetto al *cinque* (cfr. [5]): due segni **V**, di cui quello inferiore capovolto.

3. Fiammiferi e cifre numeriche.

In tutti gli esempi che abbiamo presentato nel paragrafo precedente (prescindendo dall'ultimo), ma anche in altri su cui non ci siamo soffermati, come nel sistema attico dell'antica Grecia o in quello della rappresentazione geroglifica egiziana, i numeri *uno*, *due* e *tre* – ma talora pure il *quattro* (come nel caso latino; pur con una successiva limitazione, come si è visto, al tre [2]) o anche il *cinque* (come nel caso cinese Han) – sono costantemente rappresentati ripetendo una o più volte un medesimo segno di valore unitario. Qualcosa di simile deve essere successo anche per la rappresentazione usata nella nostra civiltà. Infatti, con ogni probabilità – secondo il convincimento di vari studiosi – i numeri *uno*, *due* e *tre* inizialmente si presentavano nel modo seguente:

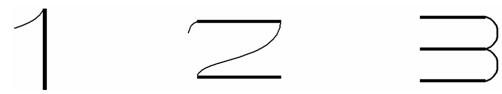


Successivamente a essi debbono essere stati aggiunti i ghirigori tipici della scrittura corsiva, che li hanno trasformati in quest'altro modo:

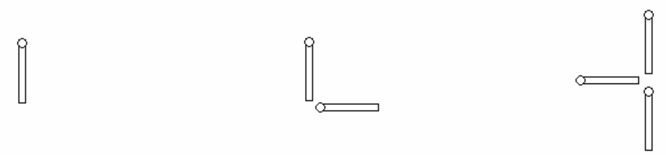
---

[1] Come nella notazione Kharosthi già vista, in cui il segno X del *quattro* è stato dualizzato nel segno XX dell'*otto*.

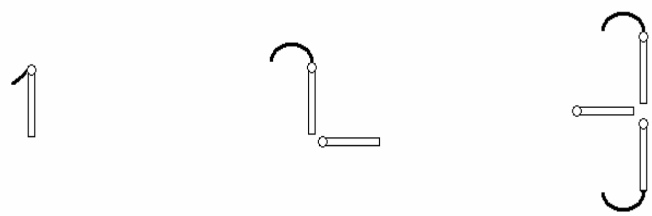
[2] Probabilmente, la limitazione a un massimo di tre segni è legata a una motivazione di immediatezza percettiva; che non sembra riscontrarsi in un maggior numero di segni (a meno che non siano disposti in posizione opportuna). Infatti, se ci si fa caso, già quattro segni si è portati a riguardarli – con un *infintesimale* ritardo percettivo – come due segni accanto a due altri segni, oppure come tre segni accanto a un altro segno. Ciò è confermato dall'usanza di accorpare a tre a tre le cifre decimali dei numeri da 1.000 in sù.



Noi qui – per ragioni che si capiscono facilmente – in un primo approccio didattico preferiamo usare dei fiammiferi (o degli stecchini) assemblati in modo tale che il segno che rappresenta una cifra sia ottenuto con una quantità di fiammiferi che corrisponde al numero che si intende rappresentare. Per le prime tre cifre abbiamo le seguenti raffigurazioni [3] :



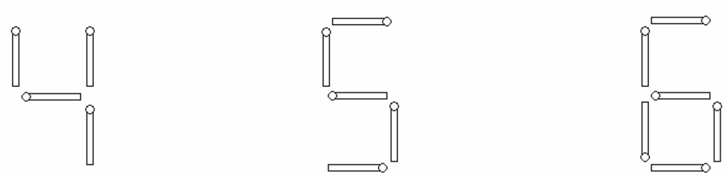
da cui si può passare alla forma rappresentata qui sotto:



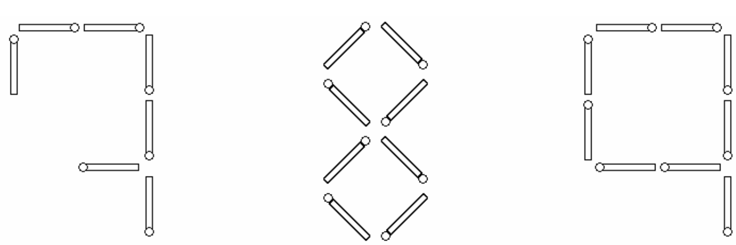
e quindi alle altre svariate forme in cui attualmente si rappresentano i numeri **1**, **2** e **3**:

1, 2, 3 (arial) **1, 2, 3** (garamond) **1, 2, 3** (algerian) 1, 2, 3 (batang)

Per le cifre **4**, **5** e **6**, avendo presente il modo in cui essi sono rappresentati negli orologi digitali, proponiamo i simboli seguenti:



In fine, per **7**, **8** e **9** potremo usare provvisoriamente le rappresentazioni seguenti:



[3] Per lo *zero* usiamo direttamente il segno 0, assimilandolo a un piatto vuoto.

Le cifre da *sei* a *nove* – grazie all'uso del colore azzurro, del rosso e del fondamentale bianco – presentano, con addendo *cinque*, decomposizioni additive fondamentali dei numeri omonimi:

$$6 = 5 + 1 \qquad 7 = 5 + 2 \qquad 8 = 5+ 3 \qquad 9 = 5 + 4$$

Concludiamo ricordando che le rappresentazioni colorate delle cifre sono riportate nell'ultima pagina. Noi consigliamo di darne una copia a ogni scolaro che sia alle prese con l'argomento.

Bibliografia

[1] C. B. Boyer, *Storia della matematica*, ISEDI Ed., (1976).

[2] G. Buffa, *Fra Numeri e Dita*, Zanichelli, Bologna (1991).

[3] G. Ifrah, *Storia universale dei numeri*, A. Mondadori (1983).

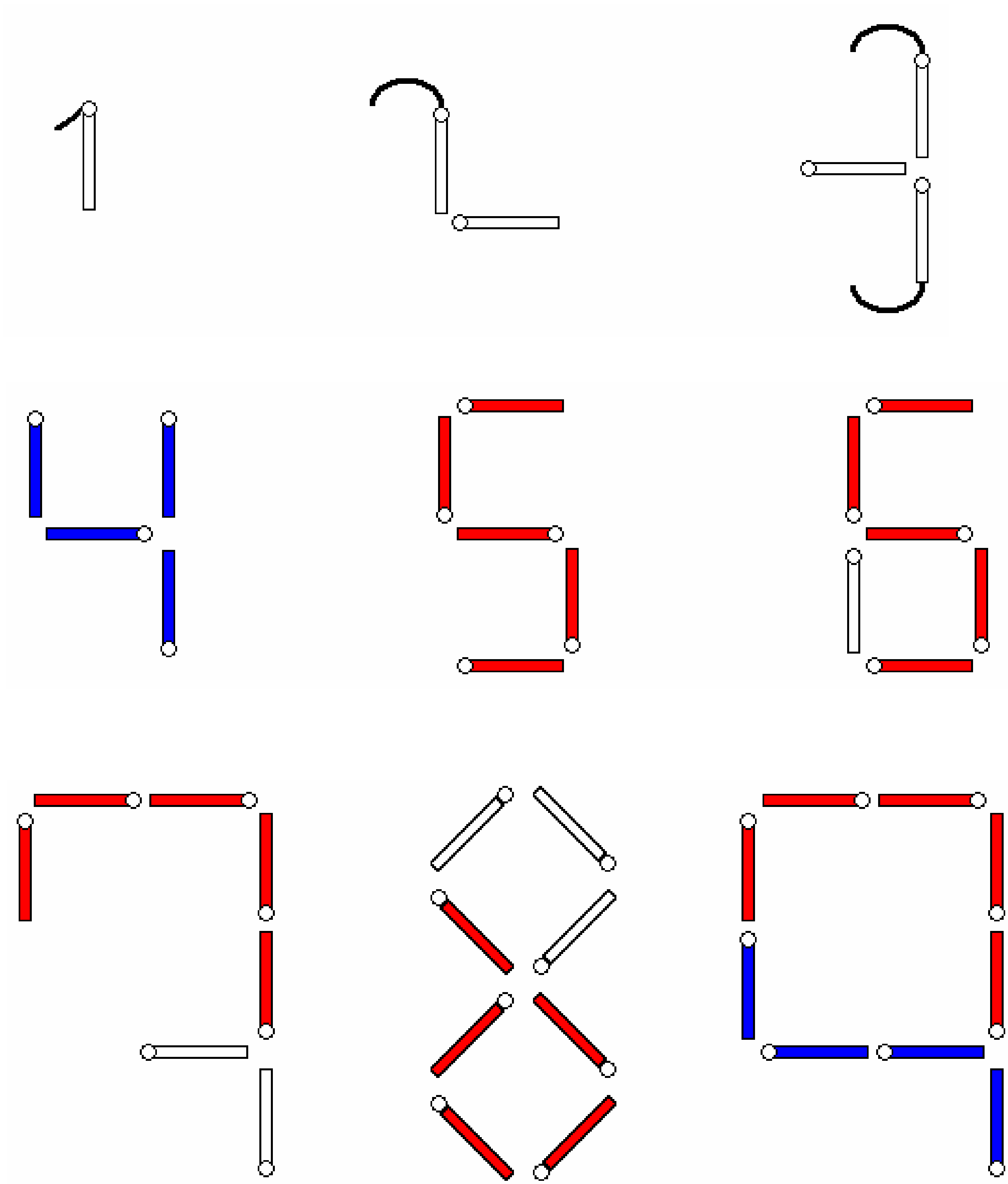
[4] D. Lenzi, *Su alcune difficoltà mnemoniche legate ai primi approcci all'aritmetica.* Periodico di Matematiche, Vol. 9, N. 3 (2009).

[5] D. Lenzi, *Rappresentazione dei numeri ed extraterrestri,* Periodico di Mat. 1 (1991).

[6] G. Loria, *Guida allo studio della storia delle matematiche*, Ulrico Hoepli Ed., Milano (1946).

[7] D. J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, Universale Paperback il Mulino, (1981).

Fiammiferi e cifre decimali



Primi passi in aritmetica

di Domenico Lenzi[*]

1. Premessa.

Alcuni anni fa ebbi modo di ascoltare a Castel S. Pietro Terme – in uno di quei seguitissimi congressi sull'insegnamento della matematica che ogni anno, a cura di Bruno D'Amore, si tengono nel primo fine settimana di novembre – un'interessante conferenza di Daniela Lucangeli, professore di psicologia presso l'Università di Padova e studiosa dei problemi dell'apprendimento della matematica in età infantile.

In quell'occasione la Lucangeli giunse ad affermare – ma per me non costituì meraviglia, avendo da molto tempo anch'io le stesse convinzioni – che attualmente i nostri bambini della fascia della scuola materna, per quel che riguarda l'apprendimento della matematica sono come relegati in una giungla, a parte poche e lodevoli eccezioni.

D'altro canto, come dice Francesca Vassallo in [7], […] *formare il bambino vuol dire innanzitutto accogliere, leggere e interpretare i suoi bisogni e le sue risorse, mettendovi ordine attraverso interventi e metodi adeguati.* […] *significa pensare la sua formazione come un'intelligente opera di stimolazione, e al tempo stesso di guida e contenimento* […] *offrire al bambino occasioni per esercitare e sviluppare le sue potenzialità, guidandolo con autorevolezza, ma con il giusto rispetto della sua crescente autonomia, e creando un contesto ambientale e delle relazioni che lo facciano sentire sicuro* […].

Ebbene, come si potrebbe non essere d'accordo con la Vassallo? In fondo da questo punto di vista la nostra Maria Montessori è stata maestra efficace, anche se i suoi insegnamenti a volte – però con eccezioni significative –non sono stati sufficientemente adeguati ai tempi attuali, cosa che la Montessori non avrebbe mancato di fare.

Certo, i più saranno portati a pensare che difficilmente il punto di vista delle Vassallo possa spingersi fino ad abbracciare le problematiche connesse con la formazione matematica. In verità, soprattutto per chi ha avuto un rapporto difficoltoso con la disciplina di Pitagora, quanto affermato dalla Lucangeli potrebbe apparire velleitario. Però si tratta di persone – purtroppo sono in quantità considerevole – per le quali i principi enunciati dalla Vassallo, per quel che riguarda la matematica, sono stati disattesi. Con danni notevoli, in particolare per coloro che hanno vissuto il loro rapporto con la matematica in termini frustranti.

Ragion per cui ci sentiamo in piena sintonia con quel giudice che qualche anno fa – forse avendo avuto egli stesso un rapporto difficoltoso con numeri, formule ed equazioni – promosse d'ufficio alla classe successiva uno studente che viveva in eterno conflitto con Talete, Euclide e la loro pur numerosa schiera di seguaci.

---

[*] domenico.lenzi@unisalento.it - Dipartimento di matematica dell'Università del Salento – Lecce.
"Incoming president" della commissione "Alfabetizzazione" del Rotary International per il Distretto 2120 (Puglia e Basilicata).

Un insegnamento della matematica vissuto e subito in maniera ossessiva, non solo non può riuscire a sviluppare le potenzialità di uno studente, ma può rivelarsi estremamente dannoso. Tuttavia la strada tracciata e imboccata da Maria Montessori andrebbe perseguita ed esplorata intelligentemente, anche alla luce di contributi efficacemente dati da studiosi che hanno saputo affrontare le problematiche dell'apprendimento della matematica senza preconcetti. Pur se i risultati delle ricerche di Jean Piaget nell'ambito dell'acquisizione dei concetti di base della matematica nell'età della scuola materna – soprattutto per quel che riguarda i concetti di conservazione delle quantità, di cui ci occuperemo in seguito – sembrano dar ragione agli scettici.

2. Verso il concetto di numero naturale.

Si può [1] dire che il concetto di numero affiori nella mente del bambino quando egli incomincia a prendere coscienza della nozione di *quantità* di una sostanza (un pezzo di plastilina, acqua contenuta in un recipiente, o anche palline collocate su di un tavolo); intendendosi con ciò una ben nota caratteristica della sostanza, che non dipende né dall'eventuale forma o dislocazione spaziale che venga data alla stessa, né dal momento in cui essa viene considerata [***conservazione della quantità***].

Naturalmente, la quantità di una sostanza non è l'unica caratteristica immutabile di questa, purché considerata nella sua interezza. Ce ne sono altre che non variano al variare della forma o (entro certi limiti) al trascorrere del tempo. Ad esempio, se il liquido contenuto in una bottiglia è rosso, esso – a meno di particolari interventi – rimarra tale anche in tempi successivi.

Invece altre caratteristiche tendono a mutare; come la temperatura di un oggetto caldo, che col tempo diminuisce. In questo caso qualcuno potrebbe pensare che è il calore che se ne va. Ma, in realtà, a rigori non esiste un'entità *calore* come tale; questo – o meglio, la temperatura – è un modo complessivo, macroscopico che noi abbiamo di percepire la velocità con cui le particelle che costituiscono l'oggetto si agitano.

Generalmente il concetto di conservazione della quantità si distingue in quello delle sostanze *discrete* e in quello delle sostanze *continue*.

Vengono dette discrete quelle sostanze che appaiono suddivise in diversi componenti singolarmente percepibili; come nel caso di una raccolta di figurine o di palline, ecc. Invece vengono dette continue le sostanze in cui ordinariamente non si riesce a distinguere i vari componenti, come nel caso di acqua o di plastilina; oppure non importa distinguerli, come nel caso di un recipiente pieno di sabbia, o di un sacco di grano, in cui generalmente non si ha interesse a distinguere i singoli granelli.

Il concetto di conservazione delle quantità continue si evolve in quello di "misura": misura di capacità, di massa (impropriamente chiamata ***peso***), ecc. Invece il concetto di conservazione delle quantità discrete si evolve in quello di numero naturale (o numero cardinale, *potenza*).

Al concetto di conservazione della quantità è immediatamente legato quello di variazione della quantità (intesa come aumento, oppure come diminuzione).

[1] Alcune delle questioni riportate in questo paragrafo sono in parte frutto di rielaborazione di considerazioni da noi già svolte in [1].

Il confronto tra quantità non può condursi sullo stesso piano per quantità continue e per quantità discrete. Infatti, nel primo caso si possono usare i classici strumenti di misurazione, mentre nel secondo è necessario un salto qualitativo assai delicato.

È un salto che deve portare ad accettare che, ad esempio, le banane contenute in un cesto e un branco di scimmie hanno la stessa quantità di componenti (sono *equipotenti*) quando ogni scimmia è nella condizione di poter mangiare esattamente una banana presa dal cesto, senza che ne rimanga alcuna.

Siamo, dunque, al confronto tra sostanze discrete – o, se si preferisce, tra due *insiemi* – tramite gli accostamenti a uno a uno; che possono essere realizzati direttamente, oppure – se i due *insiemi* sono finiti – attraverso l'usuale metodo del contare: accostando a uno a uno alle parole via via scandite nella cantilena dei numeri [*uno, due, tre, …*: si tratta dei cosiddetti *numerali*, ma noi – per semplicità – quasi sempre useremo, anche se impropriamente, il termine *numeri*] prima gli oggetti di un insieme e poi quelli di un altro; a meno che il conteggio non proceda *in parallelo*, contemporaneamente per entrambi gli insiemi [*uno-uno, due-due, tre-tre …*].

Naturalmente, per un corretto uso del contare è necessario che chi se ne serve sia conscio della posizione reciproca dei vari numeri nella loro *cantilena*. Di modo che, se il conteggio degli oggetti dei due insiemi termina sullo stesso numero, allora questo rappresenta la stessa quantità per entrambi gli insiemi. Invece, se il conteggio termina su numeri diversi, allora chi conta deve essere consapevole del fatto che come insieme ***più numeroso*** deve intendersi quello per il quale il procedimento termina dopo. In parole povere, se il conteggio degli elementi di un insieme termina su "sette" e quello di un altro termina su "nove, chi ha contato deve aver presente che il secondo viene detto più numeroso in quanto nella *cantilena dei numeri* "sette" precede "nove".

In tutto questo discorso sembra che ci si sia dimenticati di dire cosa è un numero naturale, che non deve essere confuso con la parola [il numerale] che lo designa.

Ebbene, in un primo ed elementare approccio, pensiamo che possa dirsi che un numero naturale è un concetto astratto che nasce dalla considerazione di un certo insieme finito ***A*** e di quegli altri insiemi i cui oggetti possano essere accostati a uno a uno a quelli di ***A***. E si conviene di denotare tale concetto con il numerale sul quale ha termine il conteggio degli elementi di ***A***. Onde si può dire anche che un numero naturale è una sorta di proprietà che caratterizza una certa famiglia di insiemi finiti: quelli per i quali il conteggio termina su di un medesimo numerale.

Tuttavia, per ragioni di completezza, si considera anche il caso in cui ***A*** sia vuoto, per il quale si dice che ha *zero* elementi. Ciò nonostante le *difficoltà* che in passato si sono avute nel considerare non solo lo *zero*, ma anche l'*uno*, come dei numeri; per il fatto che generalmente alla parola numero è associata un'idea di pluralità [*numerosità*].

Perciò sottolineiamo che "zero", "uno", "due", ecc. sono parole che rappresentano concetti astratti e quindi non vanno confuse con quelli; così come "amore", "libertà", "amicizia" sono parole, cioè particolari oggetti linguistici, che denotano concetti astratti ben noti [2].

---

[2] Qui le virgolette evidenziano le parole sette e nove in quanto tali, a prescindere dal loro significato. Secondo quest'uso, se ci riferiamo alla capitale d'Italia scriviamo Roma, se invece vogliamo riferirci all'allineamento di lettere che designa questa città scriviamo "Roma". Tuttavia spesso le virgolette si adoperano, come anche noi abbiamo fatto prima, quando a una parola si vuole dare un significato particolare.

Osserviamo che il concetto di numero naturale delineato precedentemente ha un carattere ordinale, nel senso che tra i vari numeri naturali esiste una naturale gerarchia, data dall'ordine in cui i loro numerali si susseguono nella cantilena del contare.

Tuttavia è possibile prescindere da quella gerarchia, rimanendo a un livello che viene detto *di tipo cardinale*. A questo livello ciò che interessa è stabilire se, dati due numeri, essi siano coincidenti oppure no, senza che necessariamente si debba dire quale dei due sia eventualmente maggiore.

A questo punto, però, avvertiamo la necessità di osservare ancora una volta che "l'orgia insiemistica" che ha caratterizzato alcuni anni fa i primi approcci alla matematica si è spesso tradotta in violenza psicologica da parte di molti insegnanti nei riguardi dei loro alunni, spesso costretti a un uso parossistico della tecnica degli accostamenti a uno a uno tra gli oggetti di insiemi diversi, senza che si giustificasse adeguatamente il fatto di trascurare a tutti i costi la tecnica del contare, spesso faticosamente conquistata. A tal proposito è opportuno tener presente che l'acquisizione di nuove conoscenze da parte del bambino avviene quasi sempre – soprattutto nei primi approcci – in termini globali; e non sempre è facile per lui percepire certi aspetti particolari quando essi concorrano alla formazione di una situazione significativa nella sua globalità. Perciò è comprensibile la difficoltà psicologica incontrata da molti alunni nel dover mettere da parte la tecnica del contare, senza che essi riescano a percepire negli esercizi di accostamento a uno a uno tra gli oggetti di insiemi diversi, l'idea di numero che si sono fatta. È quindi necessario mettere in atto opportune strategie didattiche che permettano di superare le difficoltà sopra accennate e consentano un uso proficuo di quegli esercizi anche in chiave numerica, che deve costituire un cardine fondamentale per i primi approcci alla matematica; cosa che noi cercheremo di evidenziare in modo più approfondito nel paragrafo 4.

Ad esempio, talora – ma senza abusare – a scuola gli alunni potrebbero essere sollecitati al "gioco" del confronto numerico senza l'uso della cantilena dei numeri, stimolando gli stessi ad inventare tecniche di confronto significative.

Si potrebbe anche ricordare la storiella di quella tribù pellerossa dove nessuno sapeva contare. O meglio, pur conoscendo la procedura e il significato del conteggio, nessuno era mai riuscito a compilare una cantilena che consentisse loro di contare. Quindi, dovendo il capotribù dotare ogni guerriero di un'ascia, egli fece schierare al centro dell'accampamento – ovviamente *in fila indiana* – tutti i suoi uomini validi. Poi, per ognuno di essi, incise una tacca su di un'asticella**;** dopodiché portò l'asticella al fabbro della tribù e gli chiese di preparare un'ascia per ogni tacca incisa, risolvendo così il suo problema. Ciò perché il capo tribù conosceva la procedura e il significato del conteggio, pur non essendo in grado di effettuarlo. Perciò si rendeva conto che se avesse potuto contare le tacche, allo stesso tempo avrebbe contato i guerrieri e le asce, esaurendo i tre conteggi contemporaneamente.

Comunque un insegnante preparato, non solo per quel che riguarda le conoscenze matematiche, ma anche per quel che riguarda i processi mentali di apprendimento, sarà certamente in grado di approntare altri esempi, e soprattutto di gestire efficacemente il delicato avvio del bambino all'acquisizione del concetto di numero naturale, prima e fondamentale tappa verso una competenza matematica, che non deve essere patrimonio di pochi eletti, ma costituire una componente essenziale della nostra maniera di essere uomini.

3. La barriera di Jean Piaget.

Sulla conservazione delle quantità sono di fondamentale importanza gli studi condotti a suo tempo dallo psicologo svizzero J. Piaget (si veda [6]), coadiuvato dalla sua allieva Alina Szeminska, che – nel bene e nel male; ma per questo secondo aspetto, forse, a causa di una poco accorta interpretazione del suo pensiero – ha rappresentato, con i suoi studi sul concetto di quantità e di numero, uno dei più importanti riferimenti nel corso del 20° secolo. Perciò le indagini che egli svolse nei trascorsi *anni 30* avrebbero meritato un'attenzione più meditata e accorta.

Jean Piaget evidenziò che prima dei cinque o sei anni (a seconda delle situazioni) si può essere indotti a dire – ma quanto su ciò influisce una non sufficiente padronanza di linguaggio da parte dei bambini? – che il liquido contenuto in una bottiglia cambia di quantità se esso viene travasato in una bottiglia più stretta (in cui il liquido raggiunge un livello più alto) o in più bicchieri. Facendo perciò dipendere la quantità di una sostanza continua dalla sua dislocazione spaziale. Lo stesso inconveniente fu evidenziato rispetto a quantità discrete.

Secondo l'eminente studioso svizzero, l'acquisizione del concetto di conservazione delle quantità avviene attraverso tre stadi fondamentali, che possiamo riscontrare sia per le quantità continue che per quelle discrete. Il terzo stadio è quello in cui il concetto di conservazione diventa stabile.

Rinviando a [6] per gli opportuni approfondimenti, qui diamo una fugace idea di quanto è emerso dagli studi del Piaget in merito alla conservazione delle quantità discrete, presentando alcuni esempi significativi riguardanti le sue esperienze in riferimento ai primi due stadi.

Primo stadio. Questo stadio va dai quattro anni ai quattro e mezzo/cinque. In esso la coincidenza numerica tra due aggregati di oggetti – attraverso la corrispondenza a uno a uno – viene percepita solo quando essa si evidenzia col concorso determinante dell'operatore-insegnante. Il fanciullo non è in grado di costruirla da solo; e quando la corrispondenza viene a mancare sul piano concreto – pur senza sottrazione o aggiunta di elementi nei due aggregati confrontati – essa sembra scomparire dalla mente del bambino, che viene distratto dalla dislocazione spaziale degli oggetti. Ecco un esempio relativo al primo stadio, preso da pag. 73 di [6], da cui sono stati tratti i dialoghi. In questo esempio e negli altri riferiti al secondo stadio, all'inizio si riporta il nome abbreviato del bambino, seguito dall'anno e dal mese della sua età, posti tra parentesi.

Fra (4; 3): «Prendi le uova necessarie per i porta-uovo, né di più né di meno, un uovo per ogni porta-uovo». (Il fanciullo costituisce una fila di uova che ha la stessa lunghezza di quella dei porta-uovo, pur essendo più numerosa.) «Le uova e i porta-uovo sono lo stesso? » «*Si*» «Allora metti le uova per vedere se è giusto ». (Il bambino esegue.) «Era lo stesso?» «*No*» (Si mettono via le uova superflue) «E adesso?» «*Si*» (Quindi si tolgono le uova dai porta-uovo, ammucchiandole davanti a quelli.) «E adesso è lo stesso?» «*No*» «Perché?» «*Ci sono più portauovo*» …

Secondo stadio. Questo stadio, che subentra al precedente, dura fin verso i sei anni. Esso è caratterizzato dal fatto che il bambino determina da solo la corrispondenza a uno a uno, ma anche lui perde coscienza della coincidenza numerica quando la corrispondenza viene fatta sparire concretamente, come nel primo stadio.

Dum (5; 8), pag.75: (Lui stesso fa corrispondere 6 uova a sei porta-uovo, quindi pone ciascun uovo su ciascun porta-uovo. Poi le uova vengono tolte e poste lontane tra loro.) «Sono lo stesso le uova e i porta-uovo? » «*No*» … «Se si vuole rimettere un uovo in ogni porta-uovo, va bene ancora? » «*Si … Non lo so*».

Ed ecco un esempio preso da pag. 77 di [6]. Esso ci mostra un bambino che è ormai prossimo al terzo stadio, che però non ha ancora pienamente raggiunto in quanto subentra ancora qualche fugace incertezza quando la dislocazione spaziale degli oggetti sembra poter alterare due quantità che il bambino ha realizzato con una corrispondenza a uno a uno.

Os (5; 10): (Conta un numero di uova eguale a quello dei porta-uovo in cui quelle vengono deposte. Poi le uova vengono tolte e disposte riunite davanti ai porta-uovo. Però Os non si confonde come Dum.) «È lo stesso?» «*Si*». (Poi le uova si distanziano tra loro.) «È lo stesso?» «*No*». «Dove ce n'è di più?» «*Sono di più le uova*». «Tutte le uova possono essere messe nei porta-uovo?» «*Si*».

Terzo stadio. Questo stadio subentra al secondo e compare intorno ai sei anni. Esso è caratterizzato dal fatto che il bambino determina da solo la corrispondenza a uno a uno, ma non perde coscienza della coincidenza numerica quando la corrispondenza viene fatta sparire concretamente.

4. Cantare e contare!

L'ultimo esempio presentato nel precedente paragrafo è particolarmente illuminante. Infatti Os (5; 10) – pur essendo cosciente del fatto che le uova distanziate egli riuscirà a rimetterle nei porta-uovo, realizzando nuovamente la corrispondenza a uno a uno che è stata provvisoriamente eliminata – continua a pensare che sia da prendere in considerazione anche un confronto quantitativo riferito alla dislocazione degli oggetti. Rivelando, perciò, un difetto di comprensione che è dovuto a una carenza di comunicazione: semplicemente, nessuno gli ha detto ancora come stanno le cose!

È chiaro che, finché gli inconvenienti riscontrati dal Piaget non vengono superati, è privo di senso parlare di aritmetica. Ma come porvi rimedio? Certamente il piccolo Os non si sarebbe confuso se gli avessero detto, cosa che egli era perfettamente in grado di capire, che – in relazione a confronti riguardanti la numerosità di aggregati diversi – nell'uso di termini quali *più* e *meno* si prescinde da come i vari oggetti siano dislocati. In definitiva, l'unico criterio di valutazione è quello dato dal conteggio degli oggetti dei due aggregati.

Perciò, se nei due conteggi si arriva a un medesimo numero finale, allora si dice che i due aggregati hanno lo stesso numero di oggetti [elementi]. Altrimenti si dice che ha meno oggetti l'aggregato per i cui elementi il conteggio arriva fino a un numero che viene prima del numero a cui si perviene contando gli elementi dell'altro; onde per quest'altro si dirà che esso ha più oggetti del primo.

Sottolineiamo che l'accettazione di quanto espresso poc'anzi rientra in un quadro, in *un universo* che è compreso dai bambini, che si rendono conto del fatto che la gran parte dei modi di dire e frutto di convenzioni e di accordi. Questi potranno non piacere, ma non si può prescindere da essi. Diversamente, si correrebbe il rischio di andare incontro a inconvenienti seri, così come non rispettare la convenzione che vieta di attraversare una strada col semaforo rosso – un colore molto apprezzato dalla maggior parte dei bimbi – può determinare conseguenze molto gravi.

Alla presa di coscienza della convenzione del contare si può arrivare a poco a poco, con un percorso da intraprendere già a tre anni. Si potrà incominciare col ritornello *un-due-tre* – eventualmente associato al *zum-pa-pa*: *un-due-tre*__*zum-pa-pa*.

Con l’*un-due-tre* inizieranno i primi piccoli conteggi e i primi confronti numerici. Poi, una volta che sarà stato memorizzato l’*un-due-tre*, e sarà stato correttamente acquisito il significato del confronto numerico in relazione a quantità che non superano il tre – che il bambino a un certo punto sarà in grado di effettuare anche con un semplice *colpo d’occhio* – si passerà all’*un-due-tre-qua-cin*, che sarà opportuno sottolineare con una facile arietta musicale.

Ora siamo intorno ai quattro anni e il bambino è in grado di capire che *qua* e *cin* sono rispettivamente abbreviazioni di *quattro* e *cinque*. Sono parole che, data l’età, probabilmente egli già conosce; altrimenti, l’attività da svolgere in classe, in prosecuzione e in analogia con quella relativa all’*un-due-tre* già svolta, gli consentirà di memorizzare anche queste altre due paroline, mentre il motivetto musicale che sottolinea l’*un-due-tre-qua-cin* l’aiuterà a mantenerle tutt’e cinque in quello che è il loro ordine naturale.

Sottolineiamo che l’insegnante non dovrà mai stancarsi di ricordare di tanto in tanto che è solo ed esclusivamente la cantilena *un-due-tre-qua-cin*, usata come di dovere, che permette di effettuare i confronti numerici. Una volta che il bambino avrà acquisito ciò, si potrà provare a svolgere – in questo *universo numerico* un po’ più ampio – le prime addizioni, usando palline che in un primo momento saranno distribuite in due cestini distinti, per un totale che – naturalmente – non dovrà superare il cinque; dopodiché le palline di un cestino saranno riversate nell’altro, ottenendo così un numero complessivo di palline che rappresenta la somma dei numeri di palline precedentemente contenute in cestini diversi.

Presto all’*un-due-tre-qua-cin* potrà seguire il *sei-sett-o-no-die*. Avremo perciò altre cinque paroline; cioè, cinque abbreviazioni per le quali è superfluo ripetere quanto è stato già detto per *qua* e *cin*.

Ora *un-due-tre-qua-cin* e *sei-sett-o-no-die* potranno essere inserite in un’arietta vera e propria, il cui scopo è già stato tratteggiato precedentemente in riferimento a *un-due-tre-qua-cin*.

Qui sotto proponiamo le parole di una canzoncina, per la quale abbiamo approntato anche la musica. Per la memorizzazione dei primi dieci numeri si consiglia di usare l’inizio della seconda parte.

La canzone del contare

Un due tre qua cin spegni ’l lumicin
Sei sett o no die guarda insieme a me
E vedrem le stelle che si accendono nel ciel
Sembrano fiammelle che risplendono per te

Un due tre qua cin spegni ’l lumicin
Sei sett o no die ti protegga il ciel
Schiere d’angioletti veglieranno su di te
Dormi, sogni belli e che il Signore sia con te

seconda parte

Un due tre qua cin sei sett o no die
Un due tre qua cin sei sett o no die
Canta cont’ e canta com’è bello gorgheggiar
Canta cont’ e canta la canzone del contar

Canta cont’ e canta com’è bello gorgheggiar
Canta cont’ e canta la canzone del contar

La canzone del contar la canzone del contar

Bibliografia

[1] D.Lenzi, *Sul concetto di numero naturale*. Periodico di Matematiche, 4 (1989).

[2] D.Lenzi, *Primi passi nel mondo dei numeri*. Scuola It. Moderna, 4 (1990).

[3] D.Lenzi, *Scuola dell'obbligo a cinque anni e nuovi programmi scolastici*. Periodico di Matematiche, 3 (2004).

[4] D.Lenzi, *La magia della Matematica e la didattica laboratoriale*. (in Curricolando) Ufficio Scolastico Regionale Puglia, pag.151 (2009).

[5] D.Lenzi, *Su alcune difficoltà mnemoniche legate ai primi approcci all'aritmetica*. Periodico di Matematiche, Vol. 9, N. 3 (2009).

[6] J. Piaget, A. Szeminska, *La genesi del numero nel bambino.* La nuova Italia (1968).

[7] F. Vassallo, *La formazione nella prima infanzia*. http://www.edscuola.it/archivio/interlinea/la_formazione_nella_prima_infanzia.htm

La Canzone del Contare

parole e adattamento musicale di Domenico Lenzi

In un primo approccio alla numerazione è preferibile usare solo la seconda parte (battuta 17).

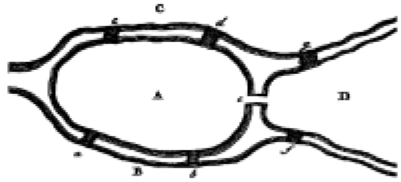
I ponti di Königsberg e la nascita della teoria dei grafi

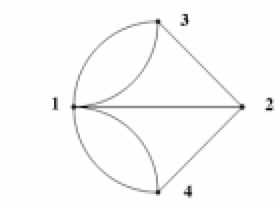
di Domenico Lenzi*

Introduzione. Negli anni ‘70 una ventata di rinnovamento investì l’insegnamento della matematica. Molti ricorderanno gli entusiasmi che la *teoria degli insiemi*, la cosiddetta ***insiemistica***, riuscì ad accendere allora. Purtroppo, un suo uso improvvido in chiave didattica fece sì che tutto finisse in una bolla di sapone. E questa importante disciplina fu di fatto bandita dall’insegnamento.
Però lo stato di degrado in cui ora versa l’apprendimento della matematica è sotto gli occhi di tutti. È quindi essenziale riesaminare le tematiche proposte ai nostri ragazzi, anche recuperando alcuni argomenti di un tempo, troppo precipitosamente cancellati dall’insegnamento; avendo come primario obiettivo quello di educare alla razionalità. Altrimenti, come Umberto Eco ebbe a scrivere alcuni anni fa sul Corriere della Sera, il prossimo stadio verso cui l’umanità si evolverà sarà quello dell’ “*Homo stupidus stupidus*”.
Tra i temi da presentare agli studenti, quello della teoria dei grafi ha una notevole importanza, sia da un punto di vista applicativo, sia dal punto di vista dell’avvio al ragionamento matematico. Qui di seguito illustreremo quelli che furono i primi passi nell’ambito di questa disciplina, nonché una proposta di semplificazione – in cui si fa uso del gioco del domino – per la discussione del classico problema sulla percorribilità dei ponti di Königsberg, che Eulero dimostrò essere irrisolubile.
Però la facile dimostrazione di Eulero ha per un non matematico il “difetto” di essere condotta in termini non sufficientemente concreti. Ed è per questo che a Königsberg pare che ci siano ancora delle persone che, non del tutto convinte del risultato di Eulero, cercano di fare quel percorso impossibile. Il che è un indice preoccupante del fatto che anche gli aspetti più elementari della matematica spesso hanno difficoltà a diventare patrimonio comune, non solo in Italia.

N. 1. Il problema dei ponti di Königsberg. Agli inizi del 18° secolo gli abitanti di Königsberg (l’odierna Kaliningrad, situata nella Prussia del nord, presso il mar Baltico) avevano un problema semplice da enunciare, che però non riuscivano a risolvere.

La citta è attraversata dal fiume *Pregel* e sorge in parte su due isole, oltre le quali il fiume si getta in mare. A quei tempi le due isole e le altre sponde del fiume erano collegate con sette ponti, come si può rilevare dallo schizzo di Fig. 1 (è lo stesso che Eulero presentò nell'articolo da lui dedicato al problema), ma anche – con un po' di attenzione – dalla vecchia mappa della città riportata qui sopra.
Ebbene, gli abitanti di Königsberg si domandavano se fosse possibile compiere un ***cammino*** (cioè, una passeggiata) lungo quei ponti in modo tale da percorrerli una <u>volta soltanto</u> (***cammino semplice***) senza tralasciarne alcuno (attualmente, ***cammino semi-euleriano***; ***cammino euleriano***, qualora si ritorni sul punto di partenza).
Eulero, introducendo la teoria dei grafi, provò che il quesito aveva risposta negativa, dando una condizione necessaria di risolubilità per problemi di quel tipo, che nel caso di Königsberg non è soddisfatta.





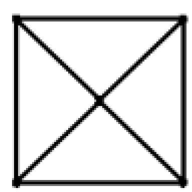
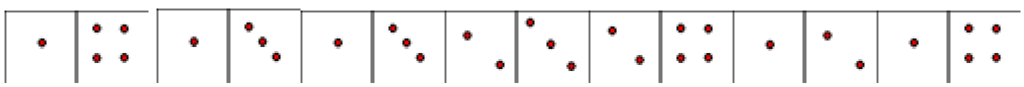


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

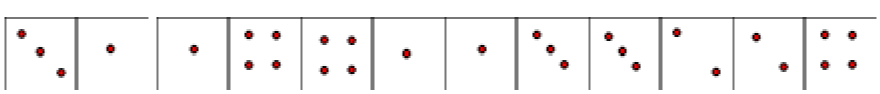
Egli risolse il problema rappresentando le quattro zone della città su cui arrivavano i sette ponti con dei punti chiamati ***nodi*** o ***vertici*** (si veda Fig. 2, dove i quattro nodi sono denotati con i numeri **1**, **2**, **3**, **4**). Inoltre ciascun ponte fu rappresentato con una linea (chiamata ***lato***, o ***spigolo***) che congiungeva i due nodi che denotavano le due zone collegate dal ponte considerato. Schemi di questo tipo prendono il nome di ***grafi***. Il numero di lati che terminano su di un nodo e detto ***grado*** di quel nodo.
Ai grafi si trasferiscono immediatamente le nozioni di *cammino* e di *cammino semplice*, intesi come percorsi lungo gli spigoli, da affrontare l'uno dopo l'altro senza "salti"; cioè, nel caso di una rappresentazione grafica, da percorrere con un solo tratto di penna. Perciò il problema di Königsberg si traduce in quello di effettuare un cammino semplice lungo <u>tutti</u> i lati del grafo di Fig. 2.

Ebbene, Eulero dimostrò che quel cammino non si può effettuare qualora un grafo abbia più di due nodi di grado dispari (***impedimento di Eulero***), come nel caso di Königsberg. Perciò quel cammino non si può effettuare nemmeno nel caso del grafo di fig. 3 – ben noto agli appassionati di quiz – dato che esso ha il solo nodo centrale di grado pari, mentre gli altri quattro hanno tutti grado 3.

Usando il gioco del domino è facile vedere che la famosa passeggiata di Königsberg non si può fare. In un secondo momento lo stesso tipo di impostazione si può usare per discutere il caso generale.
Osservando Fig. 2, ci si rende conto che gli spigoli – e quindi i sette ponti della città – si possono rappresentare con le seguenti tessere del gioco del domino; ad esempio, la prima tessera rappresenta uno dei due spigoli che congiungono il nodo **1** col nodo **3**.



Ricordiamo che un allineamento di quelle tessere, fatto rispettando la regola del domino, richiede che due di queste possano essere consecutive solo quando un numero dell'una è accostato allo stesso numero presente sull'altra. Perciò un numero presente soltanto all'interno dell'allineamento ha sempre delle presenze che sono in numero pari (naturalmente una delle tessere che allineiamo può essere capovolta rispetto alla presentazione precedente (come, ad esempio, la prima tessera qui sotto).
Nell'allineamento sottostante il numero **1** (espresso da un puntino) ha due coppie di presenze, mentre il **2** (espresso da due puntini) ha una coppia di presenze. Invece i numeri **3** e **4**, che hanno ciascuno una presenza anche in un estremo dell'allineamento, hanno un numero dispari di presenze.



Notiamo che a ogni cammino lungo gli spigoli del grafo di Fig. 2 possiamo far corrispondere un allineamento delle tessere del domino che rispetti le regole di quel gioco. Ad esempio, l'allineamento presentato poc'anzi esprime proprio il cammino costituito dallo spigolo che va dal nodo **3** al nodo **1**, seguito da quello che va dal nodo **1** al nodo **4**, che a sua volta è seguito dallo spigolo che va dal nodo **4** al nodo **1**, e così via.

Ora supponiamo, per assurdo, che il famoso cammino a Königsberg si possa fare, onde a esso corrisponde un allineamento delle sette tessere. Ebbene, in quell'allineamento almeno due numeri sono presenti soltanto all'interno dell'allineamento (agli estremi sono disponibili solo due posti!). Fissiamo l'attenzione su uno di questi numeri e chiamiamolo ***a***.

Per quanto è stato già detto, ***a*** nell'allineamento ha un numero pari di presenze. Nello stesso tempo ***a*** è presente tante volte quante sono le tessere in cui esso figura (ricordiamo che c'è una tessera per ogni spigolo); cioè, tante volte quanti sono gli spigoli che toccano ***a***. E questi sono in numero dispari, dato che ogni nodo del grafo di Fig. 2 ha grado dispari. Il che è assurdo. Perciò il cammino non si può fare.

Fine del problema!

Nota Bene. Con un po' di attenzione si vede che il discorso si può ripetere per un qualsiasi grafo che abbia <u>più di due nodi</u> di grado dispari. Infatti – avendo indicato ciascun nodo con un numero e traducendo il problema in termini di gioco del domino – poiché i nodi di grado dispari sono più di due e le posizioni agli estremi sono soltanto due, uno di questi nodi sarà rappresentato da un numero che nell'ipotetico allineamento di tessere può essere presente solo all'interno di un allineamento, quindi un numero pari di volte. Ciò – come per Königsberg – è in contrasto col fatto che quel nodo abbia grado dispari.

Viceversa, si può provare che, dato un grafo quasi-connesso (cioè, che si presenti come un blocco unico, a parte l'eventuale presenza di nodi su cui non arrivino spigoli: nodi di grado 0 [1]), se l'*impedimento di Eulero* non c'è, allora il cammino semi-euleriano esiste sempre; inoltre, se ne può dare una costruzione.
Però la dimostrazione che Eulero fece in [E] risultò poco chiara. Soltanto nel 1873 C. Hierholzer (si veda [Hi] o [Bi]) fornì una dimostrazione convincente.
Siccome spesso la stampa propone ai lettori di trovare un cammino semi-euleriano su di un grafo che sia quasi-connesso – ora faremo vedere come procedere.

N. 2. Appendice: come costruire un cammino semi-euleriano. Sia dato un grafo ***G*** quasi-connesso, per il quale non sussista l'*impedimento di Eulero*. Noi forniremo due diversi modi per costruire il cammino semi-euleriano. Facciamo presente che, per semplicità, noi proveremo soltanto alcune delle proprietà che enunceremo: le più facili. Infatti qui ci interessa fornire due procedure; la conferma della loro "bontà" il lettore la riceverà dal fatto che esse funzionano. In [L] si possono trovare le giustificazioni relative alla prima procedura.

Osservazione 1. È facile verificare che se il grafo ***G*** ha soltanto nodi di grado pari, allora il nodo su cui termina un cammino semplice che non possa essere ulteriormente prolungato [in particolare, un cammino semi-euleriano] coincide col nodo di partenza.

Prima procedura. Inizialmente, se nel grafo ci sono nodi di grado pari ci si posizioni su uno qualsiasi di questi; altrimenti ci si posizioni su uno dei due nodi di grado dispari. Indichiamo con **1** il nodo prescelto. Quindi, senza porsi alcun problema, a partire da **1** si percorrano via via i lati del grafo secondo un cammino semplice C_1; cammino che, ovviamente, dovrà interrompersi quando si perverrà ad un nodo i cui spigoli sono già stati tutti percorsi. Già in questa prima fase si avrà l'accortezza di numerare gli spigoli via via percorsi.
Se non ci sono altri spigoli da percorrere, allora quella numerazione ci dà la "traccia" del cammino semieuleriano cercato. Altrimenti si ritorni al nodo **1** e si ripeta il cammino già fatto, ma con una piccola variante. Precisamente: trovandosi su di un nodo **i**, se da questo partono spigoli che ancora

non sono stati percorsi [2], allora sul cammino già svolto si va ad innestare un nuovo cammino semplice *C'* che parte da **i** e procede finché è possibile, senza imboccare spigoli già percorsi nel primo cammino.
La precedente Osservazione 1 consente di accertare opportunamente che il cammino *C'* termina sul nodo **i**; da cui si riprenderà il cammino C_1, su cui si innesteranno eventuali nuovi cammini simili a *C'*, nei quali non si dovranno percorrere spigoli già percorsi in C_1 oppure in *C'*. In tal modo si ottiene un nuovo cammino semplice C_2 – ai cui spigoli sara stata attribuita via via un'opportuna numerazione – che presenta un numero di spigoli superiore a quelli presenti in C_1.
Se in C_2 sono stati percorsi tutti gli spigoli di ***G***, allora C_2 è il cammino semieuleriano cercato; altrimenti si ripete lo stesso procedimento effettuato dopo aver determinato C_1.
Poiché ***G*** un numero finito di nodi è i cammini semplici che via via si costruiscono presentano un numero di spigoli sempre maggiore, è chiaro che a un certo punto si perverrà al cammino semi-euleriano cercato.

Seconda procedura. Per comodità, su di un foglio facciamo una copia a matita del nostro grafo. Quindi nel costruire il cammino, dopo aver percorso uno spigolo, provvediamo a cancellarlo dalla nostra copia, ottenendo così un grafo residuo ***G'***. Dopodiché nell'originale andiamo a contrassegnare lo spigolo corrispondente a quello cancellato con un numero d'ordine (1 per il primo che viene cancellato, due per il secondo, e così via).
Come vedremo, il lato da percorrere di volta in volta sarà tale che, una volta eliminato, sussista ancora la seguente proprietà:

(*) il grafo residuo è quasi-connesso e per esso non sussiste *l'impedimento di Eulero*.

Ciò premesso, distinguiamo due casi:

Caso a) Il grafo ***G*** abbia esclusivamente nodi di grado pari. In tal caso si dimostra che si può partire da un nodo qualsiasi e percorrere un qualsiasi lato ***l*** che tocchi quel nodo.
Cancellato ***l***, si può verificare che il grafo residuo ***G'*** continua a essere quasi-connesso. Inoltre per ***G'*** non compare *l'impedimento di Eulero*, dal momento che in esso ci sono esattamente due nodi di grado dispari; precisamente quelli che in ***G*** erano collegati dal lato *l*. Perciò per ***G'*** si può proseguire secondo quanto previsto per ***G*** nel successivo caso **b)**.

Caso b) Il grafo ***G*** abbia esattamente due nodi di grado dispari. Allora noi inizieremo il nostro cammino semi-euleriano posizionandoci preliminarmente su uno qualsiasi di questi due nodi, che indichiamo con **1**. Però in questo secondo caso – al contrario del precedente, dove si è detto che il pericolo non sussiste – dovremo imboccare un lato ***l*** che non presenti l'inconveniente che, una volta eliminato, determini un grafo residuo ***G'*** che non sia quasi-connesso. Non è difficile verificare che questo tipo di lato esiste sempre.
Inoltre, per il grafo residuo ***G'*** *l'impedimento di Eulero* non può valere. Infatti il nodo **1** si trova ad avere in ***G'*** grado pari. Perciò, se anche l'altro nodo toccato da ***l*** in ***G*** – che indichiamo con **2** – è quello di grado dispari, allora in ***G'*** tutti i nodi hanno grado pari. Quindi per ***G'*** si procederà come nel precedente caso **a)** per ***G***.

Invece, se in ***G*** il nodo **2** è di grado pari, allora anche ***G'*** avrà esattamente due nodi di grado dispari: il nodo **2** e l'altro già presente in ***G***, che non è stato considerato. Quindi per ***G'*** si potrà procedere come nel presente caso **b)** per ***G***, considerato che siamo già posizionati sul nodo **2**, che in ***G'*** ha grado dispari.

Nota Bene. Avendo iniziato col grafo ***G***, il procedimento si arresterà solo quando sarà stato eliminato anche l'ultimo lato.
È chiaro che il cammino che si costruisce in tal modo è semi-euleriano. Infatti ciascun lato dopo essere stato percorso viene eliminato, perciò non potrà più essere percorso, onde il cammino è semplice. Inoltre, il fatto che ciascun lato sia eliminato ci dice che tutti i lati vengono percorsi.

BIBLIOGRAFIA

[Bi] Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J. *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford (1976).
[E] Euler L. *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sc. Petrop., t. 8 (1736), pp. 128-140 (reprinted in [E_1]).
[E_1] Euler L. *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis* (a reprint of [E]) Commentationes Algebraicae, Teubner, Lipsia, Berlin (edidit L. G. Du Pasquier) (1923).
[Hi] Hierholzer C. *Über die die Möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechnung zu umfahren*, Math. Annalen **6**, pp. 30-32 (translated in pp. 11-12 of [Bi]) (1873).
[L] Lenzi D. *Eulero e I ponti di Königsberg* … Lettera matematica pristem 49 (2003).

* Presidente, per l'anno sociale 2010-2011, della commissione "Alfabetizzazione" per il distretto 2120 (Puglia-Basilicata) del Rotary International; domenico.lenzi@unisalento.it - Dipartimento di matematica dell'Università del Salento, Lecce.

[1] In termini più precisi ciò vuol dire che, dati due nodi distinti e di grado diverso da 0, onde su di essi arriva uno spigolo, c'è un cammino che li collega. Un grafo quasi-connesso che sia privo di nodi di grado 0 è detto connesso.
[2] Si può verificare che su almeno uno dei nodi toccati nel cammino *C* arriva uno spigolo che in *C* non è stato percorso.

* Presidente, per l'anno sociale 2010-2011, della commissione "Alfabetizzazione" per il distretto 2120 (Puglia-Basilicata) del Rotary International; domenico.lenzi@unisalento.it - Dipartimento di matematica dell'Università del Salento, Lecce.

Alla ricerca di una legge: esperienza di un percorso didattico

Un percorso su resistività degli isolanti e dei conduttori per scoprire la proporzionalità diretta e inversa.

di Leonardo Barsantini

Il percorso, al confine fra l'ambito tecnologico e quello scientifico, cerca di far superare lo stereotipo della divisione in classi dei materiali. Comprendere, relativamente alle proprietà elettriche, che i materiali si possono suddividere in isolanti e conduttori, è sicuramente importante ed è il primo passo da fare, ma questa classificazione deve prevedere un'ulteriore raffinazione che va al di là di questa prima approssimazione. La definizione di classi di tipicità, infatti, ci permette di classificare gli oggetti e i fenomeni all'interno di ambiti omogenei, ma fa anche correre il rischio che queste classi si trasformino in stereotipi della mente che non servono a chiarire le idee, ma a intrappolarle.

Successivamente a una prima fase di indagine sui conduttori e gli isolanti è necessario far comprendere che questa distinzione così netta, in realtà è molto più sfumata, e si passa con continuità da un estremo all'altro. Per far questo è necessario introdurre un "indice" che caratterizza la capacità di far scorrere corrente elettrica in un dato materiale, al quale imponiamo il nome di resistenza, unificando conduttori e isolanti.

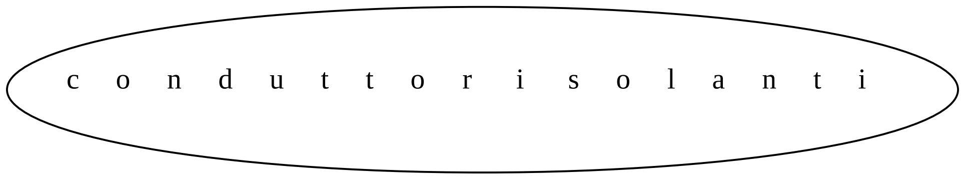
Il percorso è pensato per gli studenti del biennio della scuola superiore sia in ambito fisico che in quello tecnologico, rivolgendosi direttamente a loro con indicazioni operative. La mediazione del docente è, ovviamente, indispensabile per comprendere in quale momento del percorso didattico può essere inserito, quali conoscenze richiede, per fornire necessarie indicazioni e chiarimenti e soprattutto, per frazionare il materiale in più tappe. Come tutti i percorsi di lavoro anche questo contiene indicazioni che possono e devono essere adattate alle specifiche esigenze. Il lavoro si articola attraverso le misurazioni di resistenza di fili di un dato materiale misurate con l'ohmmetro. Gli studenti possono non conoscere lo strumento ma la comprensione di come opera è alla loro portata se si sono fatti riflettere sullo studio dei primi fenomeni elettrici e sulle cariche in movimento. Non interessa sapere cosa c'è dentro l'ohmmetro, ma che questo misura le cariche in movimento in un certo materiale spinte a muoversi da una pila presente al suo interno. Nel percorso si introduce, oltre alla resistenza, anche la resistività come indice "intensivo" che caratterizza la capacità di favorire il passaggio delle cariche elettriche. Lo studio della resistività approfondisce il concetto di grandezza intensiva e, a tal proposito, si può vedere un parallelo con il peso specifico.

Il lavoro proposto prende lo spunto dallo studio di proprietà elettriche, ma contiene anche altri aspetti, infatti, i dati misurati, peraltro molto semplicemente, permettono di ricostruire una legge riflettendo sulla proporzionalità diretta e inversa, favorendo così una trasversalità con la matematica in un caso concreto. Gli elementi in gioco sono le misure, le tabelle, i grafici, l'eventuale analisi con Excel in un ambito che richiede la capacità di interpretare semplici schemi elettrici o indicazioni per le misurazioni. Da un certo punto di vista il percorso può essere considerato come una occasione di lavoro sulla proporzionalità diretta e inversa. La parte finale, un breve approfondimento, rende conto di alcuni risultati alla luce di un'interpretazione più fisica dei fenomeni, indagando le cause più profonde di certi comportamenti.

Il percorso didattico

Sappiamo già che i materiali possono dividersi in isolanti e conduttori, ma come sempre accade le cose sono più complesse. Ad esempio alcuni materiali conduttori sono “più o meno conduttori” e alcuni isolanti sono “più o meno isolanti”. Una rappresentazione grafica dei conduttori e degli isolanti ideali può essere del tipo seguente:

Una rappresentazione che tiene conto dei materiali reali è del tipo:



Per tener conto di ciò si introduce una nuova proprietà che prende il nome di resistenza: buoni conduttori hanno una bassa resistenza, buoni isolanti hanno una resistenza elevata. Possiamo pensare che nei materiali con elevata resistenza, collegati a una pila, si abbia un piccolo movimento di cariche, al contrario di ciò che accade nei materiali con bassa resistenza.

In commercio sono disponibili strumenti, detti ohmmetri, che misurano la resistenza di un materiale. Al loro interno è presente una pila che viene utilizzata per far circolare corrente nel materiale al quale sono collegati. In base a quanta corrente si muoversi da un polo della pila all’altro attraverso il materiale, l’ohmmetro fornisce un valore che è un indice di quella che noi chiamiamo resistenza, cioè una sorta di resistenza al movimento delle cariche elettriche.

Supponiamo di aver realizzato un circuito con una lampada, una pila di tensione adeguata per far accendere la lampada e dei fili buoni conduttori.

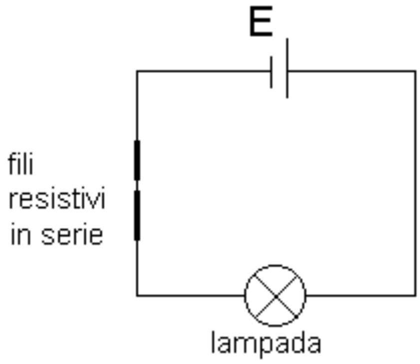
Prova a ipotizzare cosa accade alla luminosità della lampada, cioè se aumenta, diminuisce o resta uguale, se nel circuito si inserisce un pezzo di filo di un materiale resistivo con caratteristiche intermedie fra un buon isolante e un buon conduttore.

………
………
…………
………..
…..……
…………
………
……

Sempre pensando alla luminosità della lampada, cosa accade se si allunga il filo resistivo o si mettono più fili in serie, cioè uno di seguito all’altro (come nella seguente figura), sempre di materiale resistivo?

………
………
………

………..
…..………...…………………………………………………………….…………………………….…………..…………
………



I collegamenti elettrici vengono realizzati con dei fili che sono dei buoni conduttori. Il materiale utilizzato per i cavi che portano la tensione e la corrente a casa vostra dall'esterno, o per i cavi dell'impianto elettrico interno all'abitazione è il rame. Per ragioni di sicurezza, visti gli effetti dannosi sul corpo umano di tensioni e correnti elevate, i cavi di rame sono rivestiti con guaine di protezione.

Queste guaine sono di materiale isolante o conduttore?

……
.……….…………
…………
……
…….

Possiamo utilizzare anche noi dei fili di rame per i collegamenti fra la pila e la lampadina. Per verificare se le ipotesi fatte sono corrette, si può realizzare il circuito precedente.

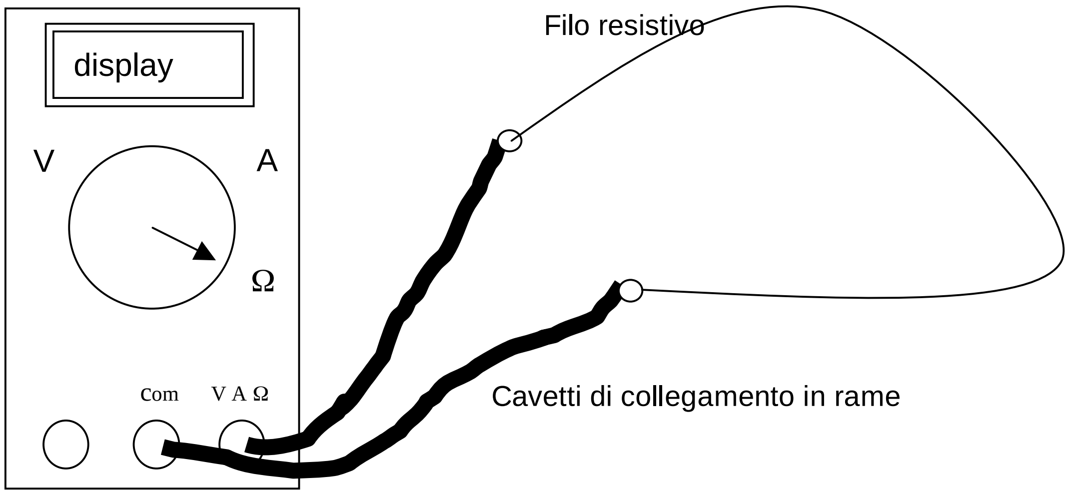
Dopo aver montato il circuito con la pila e la lampadina, per constatare che si accende, puoi introdurre, uno alla volta in serie, i fili di materiale resistivo forniti dall'insegnante, e controllare se la tua ipotesi sulla luminosità è corretta.

……
……

Abbiamo visto l'effetto di un materiale resistivo sulla luminosità della lampada. Ma il materiale non è l'unico fattore che determina la luminosità, questa dipende anche dalla lunghezza dei fili. Possiamo pensare che la resistenza, oltre a dipendere dal tipo di materiale considerato, dipenda anche lunghezza cioè dalla "geometria" del filo.

Ma torniamo all'ohmmetro. L'ohmmetro fa normalmente parte di uno strumento utilizzato per le misure elettriche che prende il nome di Tester o di Multimetro. Questo strumento può misurare la tensione fornita da una pila o la corrente che scorre in un circuito elettrico (come quello precedente con la lampada e la pila). Inoltre può anche misurare la resistenza di un materiale. In molti tester è presente una manopola centrale che deve essere ruotata per selezionare la misurazione che si desidera fare. Ad esempio, ponendo la manopola su V si può misurare una tensione, mentre su A si misura una corrente. Per misurare una resistenza è necessario posizionare la manopola su Ω, che rappresenta l'unità di misura della resistenza. Questo nuovo simbolo sta per ohm (si legge om) in onore dello scienziato tedesco che si interessò al problema della resistenza elettrica.

Nella figura riportata sotto si mostra come si può utilizzare il tester come ohmmetro per misurare la resistenza del filo resistivo. Per il collegamento fra il filo resistivo e il tester si usano dei cavetti, in dotazione alla strumento, di rame.



Misura la lunghezza e la resistenza di un solo filo resistivo (senza pila e lampadina) e riporta i dati in tabella. Collega in serie al primo un secondo filo e misura nuovamente la lunghezza totale e la resistenza totale e così via per tre o quattro fili in serie.

Quanto varrà la resistenza di un filo di lunghezza nulla?

lunghezza del filo [m]	resistenza del filo [Ω]	Fili resistivi in serie
0		Nessuno
		1
		2
		3
		4

Riporta in grafico i valori della resistenza in funzione della lunghezza del filo.

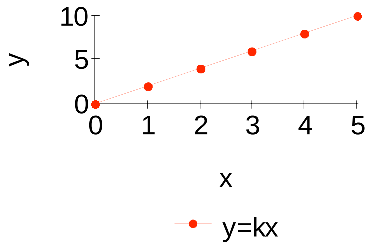
Il grafico ottenuto può far pensare a una proporzionalità diretta fra resistenza e lunghezza?

……
……
………..
……..
…..……
…………

I valori che si ottengono da misurazioni presentano sempre degli errori, ma con i dati a vostra disposizione non dovrebbe essere difficile ottenere dei punti che stanno su una retta e, visto che la retta passa per l'origine, possiamo pensare che ci sia una proporzionalità diretta fra resistenza del filo e lunghezza.

Consideriamo una relazione che sappiamo essere di proporzionalità diretta quale quella indicata da y = kx (k e x sono moltiplicati), dove k è una qualunque costante e x e y due variabili; facciamo un esempio nel caso di k=2. Se x=0 allora anche y=0, se x=1 allora y=2; se x=2 allora y=4 e così via, cioè ci si accorge che se aumenta x allora aumenta anche y.

Se si riportano i dati in grafico si ottiene :



Dividendo a destra e a sinistra per x (nel caso in cui x sia diversa da zero), si ottiene che la costante k è data dal rapporto:

$$k = \frac{y}{x}$$

Supponendo che valga una relazione di proporzionalità diretta, scrivi la relazione che lega la resistenza, indicata con R, e la lunghezza dei fili, indicata con l per mezzo della costante k.

……
…….

Possiamo cercare la proporzionalità anche da un altro punto di vista utilizzando sempre i dati della precedente tabella per calcolare k. Nella tabella devi anche inserire l'unità di misura di k.

l [m]	R [Ω]	**k [?]**
0		

Dai valori riportati nella terza colonna della tabella, ritieni che k sia una costante?

……
……
………..
……..
…..……
…………

Normalmente i dati che si hanno a disposizione permettono di ottenere dei valori di k "vicini" l'uno all'altro e quindi di concludere, tenendo conto di eventuali errori di misurazione, che k è una costante. E' anche possibile utilizzare il programma Excel per tracciare grafici. Dopo aver inserito i valori si sceglie l'opzione Creazione guidata Grafico, e fra i grafici proposti la Dispers. (XY). Realizzato il grafico, cliccando sullo stesso, appare in alto fra i vari menù anche quello Grafico, che al suo interno contiene l'opzione aggiungi linea di tendenza. Scegliendo come tipo quello "lineare" e come opzioni "Visualizza l'equazione sul grafico" e "Visualizza il valore di R al quadrato sul grafico" si ottengono altre informazioni. Sul grafico appare la relazione che lega la resistenza con la lunghezza per mezzo della costante di proporzionalità calcolata dal programma e che potete confrontare con la vostra. Inoltre vi viene anche fornita un'altra informazione, espressa dal simbolo R^2, che non ha niente a che vedere con la resistenza (purtroppo i simboli utilizzati sono in entrambi i casi la R), ma con la bontà della retta. R^2 varia da 0 a 1, con $R^2 = 1$ si ha una retta al 100%. Tenendo conto che ci sono sempre degli errori nelle misure non ci si dovrà aspettare il valore 1, ma un valore di poco inferiore. In questo modo potete farvi un'idea della bontà della vostra retta.

Traccia il grafico precedente utilizzando il programma Excel e visualizza l'equazione e il valore di R^2.

Abbiamo stabilito, con un buon grado di sicurezza, che c'è proporzionalità fra la resistenza e la lunghezza del filo. Possiamo adesso chiederci qual è l'andamento di R al variare della sezione del filo o del raggio del filo. Se paragoniamo un filo a un cilindro, allora la sezione è l'area di base. La sezione è un'area e si misura in m^2 o in mm^2, il raggio è una lunghezza e si misura in m o in mm.

Le relazioni che legano la sezione al raggio e la circonferenza al raggio sono:

$$S=\pi r^2 \qquad e \qquad C=2\pi r$$

con S sezione, r raggio e C circonferenza. Come potete vedere circonferenza e raggio sono fra loro proporzionali e la costante di proporzionalità è 2π. La stessa proporzionalità non c'è fra sezione e raggio.

Perché non c'è proporzionalità diretta fra sezione e raggio?

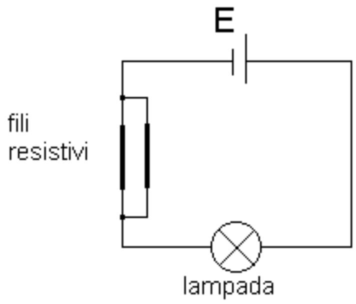
………
………
………..
………..
…..………………………………………………………………………………………………………
…………

Vogliamo adesso indagare se la resistenza è in una qualche relazione di proporzionalità con la sezione o il raggio. Per capire come stanno le cose si prendono gli stessi fili resistivi di prima. Ripartendo dal circuito con la pila e la lampadina si inserisce un filo resistivo e, come già sappiamo, la luminosità della lampada diminuisce. Con questa situazione presa come riferimento, si inseriscono nel circuito altri fili resistivi, ma non in serie, bensì in parallelo al primo filo. Mettendo in parallelo i fili resistivi possiamo pensare di lavorare con fili, via via, di raggio e sezione maggiore.

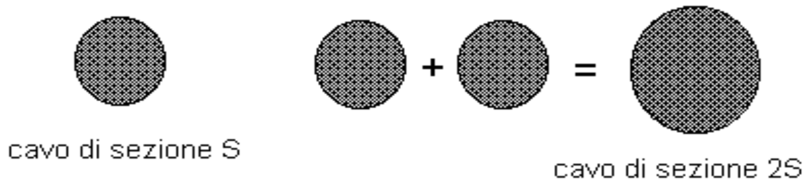
Avendo già inserito il primo filo resistivo, come pensi che vari la luminosità della lampada all'aumentare del numero dei fili inseriti in parallelo? (Aumenta, diminuisce, resta uguale).

………
………
…………

………..
….………………………………………………………………………………………..……………………
…………



Qui è necessario fare molta attenzione. Due fili resistivi in parallelo raddoppiano la sezione rispetto a un solo filo, tre fili in parallelo triplicano la sezione. Lo stesso non avviene per il raggio, un cavo di sezione doppia non ha un raggio (vedi la figura sotto) doppio rispetto ad un solo filo.



Calcola la superficie di un cerchio di raggio uguale a 1 e quella di un cerchio di raggio uguale a due. La seconda superficie è doppia della prima?

………
……
…………
………..
….………………………………………………………………………………………..……………………
…………

Per verificare se le ipotesi sulla luminosità della lampada sono corrette, si può realizzare il circuito precedente. Dopo aver montato il circuito con la pila, un filo resistivo e la lampadina, per constatare che si accende, puoi introdurre, uno alla volta in parallelo, i fili di materiale resistivo forniti dall'insegnante e controllare se la tua ipotesi sulla luminosità è corretta.

………
……

Misurando le resistenze dei soli fili (senza né pila, né lampada) si riportano i dati in tabella. Dalla misura del raggio o del diametro di un filo, che è indicata dal costruttore o può essere misurata con un calibro, si ricava la sezione del filo. Ponendo più fili in parallelo la sezione raddoppia, triplica e così via, ma sappiamo che altrettanto non vale per il raggio. Calcolata la sezione totale, di due, tre o quattro fili resistivi, si può allora ricavare il raggio equivalente, cioè il raggio di un filo di sezione doppia, tripla o quadrupla:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Esegui le misure e riporta i dati in tabella

sezione del filo [mm^2]	raggio del filo [mm]	resistenza del filo [Ω]	Fili resistivi in parallelo

			1 (non c'è parallelo)
			2
			3
			4

Riporta in due grafici distinti la resistenza del filo in funzione del raggio e in funzione della sezione del filo.

Leggendo i grafici descrivi come varia la resistenza totale dei fili in parallelo all'aumentare della sezione o del raggio del filo? (Aumenta, diminuisce, resta uguale).

………
………
…………
………..
….………………………………………………………………………………………………………
…………

I due grafici sembrano abbastanza simili ma è difficile capire quale tipo di relazione c'è fra R e S oppure fra R è r.

Dai tre grafici che abbiamo tracciato (R - *l*, R - r, R - S) alcune indicazioni possiamo però ricavarle:

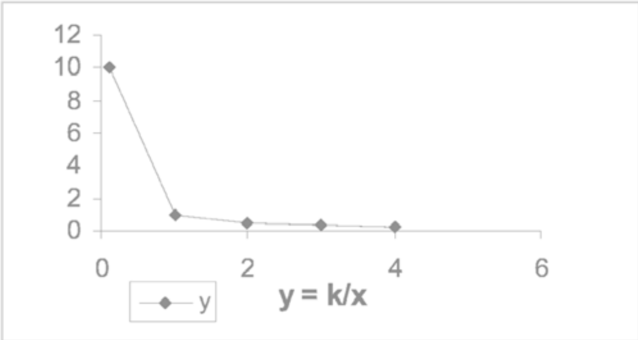
All'aumentare della lunghezza del filo la resistenza aumenta o diminuisce? All'aumentare della sezione o del raggio del filo la resistenza aumenta o diminuisce?

………
………
…………
………..
….………………………………………………………………………………………………………
…………

Sicuramente non c'è proporzionalità diretta fra la resistenza e la sezione o il raggio del filo resistivo. Potrebbe esserci, però, una proporzionalità inversa del tipo:

$$y = \frac{k}{x}$$

con k costante di proporzionalità.



Il grafico della relazione di proporzionalità inversa y=k/x pare avere lo stesso andamento del grafico fra R e r e fra R e S: in questo caso non è però così chiaro se fra R e r, oppure fra R e S vi sia una proporzionalità inversa, infatti mentre è facile riconoscere la retta della proporzionalità diretta non è altrettanto facile fare un confronto con le altre curve decrescenti.

Moltiplicando a destra e a sinistra per x la precedente relazione, si ottiene:

$$y\,x = k$$

cioè il prodotto delle due variabili è costante. Con i dati della precedente tabella si possono calcolare:

$$k_1 = r\,R$$
$$k_2 = S\,R$$

Calcola k_1 e k_2 e riporta i dati nelle due tabelle. Inserisci nella tabella le unità di misura per k_1 e k_2.

r [mm]	R [Ω]	k_1 [?]

S [mm^2]	R [Ω]	k_2 [?]

Dai valori di k calcolati sei in grado di capire se c'è una relazione di proporzionalità inversa fra R e r o fra R e S? Una delle due k è una costante. Lo sono entrambe, oppure nessuna delle due è costante?

………
………
…………
………..
….…………………………………………………………………………………………….……………………
…………

A questo punto il mistero dovrebbe essere svelato, ma possiamo fare un ulteriore indagine scrivendo la relazione:

$$y = \frac{k}{x}$$

come:

$$y = k \frac{1}{x}$$

Da questo punto di vista si ha una proporzionalità diretta fra y e 1/x. Con i dati a disposizione si può calcolare 1/r e 1/S. Nella tabella si prende in considerazione anche il caso limite di sezioni, o raggi, molto grandi e quindi di resistenze molto piccole, come già sappiamo. Sul grafico si possono riportare i valori (circa zero) a zero.

Con i dati a tua disposizione, completa la tabella calcolando 1/r e 1/S.

r [mm]	1/r [mm^{-1}]	S [mm^2]	1/S [mm^{-2}]	R [Ω]
(Molto grande)	(Circa zero) 0	(Molto grande)	(Circa zero) 0	(Circa zero) 0

Riporta in due grafici distinti la resistenza del filo in funzione dell'inverso del raggio e in funzione dell'inverso della sezione del filo.

Traccia i grafici precedenti utilizzando il programma Excel e visualizza l'equazione e il valore di R^2.

Quali conclusioni è possibile trarre dall'analisi dei due grafici?Sono in accordo con quanto visto prima a proposito di k_1 e k_2.

………
………
…………
………..
…..……
…………

Mentre nel grafico fra R e 1/r non si ottiene una retta, nel grafico fra R e 1/S si ottiene una retta che ci fa comprendere che esiste una relazione di proporzionalità fra R e 1/S, e quindi, che c'è una proporzionalità inversa fra R e S: soltanto k_2 è una costante.

Scrivi la relazione di proporzionalità inversa che lega la resistenza e la sezione del filo.

………………………………………………………………………………………………………..

Ricapitolando abbiamo visto che la resistenza di un filo è direttamente proporzionale alla lunghezza e inversamente proporzionale alla sezione. Questo ci ha permesso di scrivere due relazioni che possono essere riportate a un'unica legge.

$R = k\,l$ $\qquad\qquad$ $R = \frac{k_2}{S}$

La prima relazione è stata ricavata nel caso in cui la sezione non variava, era costante. Nel secondo caso la costante era la lunghezza. Mettendo assieme le due relazioni possiamo scrivere:

$$R = \rho\,\frac{l}{S}$$

con ρ (è una lettera greca e si legge ro), costante di proporzionalità.

A parità di lunghezza e sezione tutti i materiali hanno la stessa resistenza? Da cosa può dipendere la costante di proporzionalità ρ *?*

……
……
…………
……..
…..……………………………………………………………………………………….……………………
…………

All'inizio del lavoro abbiamo fatto una distinzione fra isolanti e conduttori, mettendo in evidenza che non è facile dire dove "finiscono" i conduttori e "iniziano" gli isolanti. Per caratterizzare meglio i materiali, da un punto di vista elettrico, abbiamo introdotto il concetto di resistenza che unifica sia gli isolanti che i conduttori: maggiore è la resistenza più un materiale è isolante, minore è la resistenza più il materiale è conduttore. Tornando all'ultima domanda dovrebbe essere adesso chiaro che a parità di lunghezza e sezione la costante ρ *dipende dal materiale.*

Possiamo stimare la costante ρ per il materiale dei fili resistivi con i quali abbiamo fatto le prove. Il calcolo può essere sviluppato per diverse lunghezze e sezione e i risultati possono essere riportati in una tabella che permetta di confrontarli fra loro e di fornirci una stima del valore di ρ. I dati possono essere ripresi dalla prima e dalla terza tabella facendo attenzione ad associare correttamente lunghezza e sezioni.

$$\rho = R\,\frac{S}{l}$$

Riporta alcuni dati in tabella utili per il calcolo di ρ.

S [mm^2]	R [Ω]	l [m]	ρ [$\Omega \cdot mm^2/m$]

La costante ρ è detta "resistività". La resistenza, oltre a dipendere da l e S, dipende anche dalla resistività del materiale considerato: materiali con una minore ρ rispetto ad altri, hanno anche una minore R (a parità di lunghezza e sezione). La resistività ci fornisce infatti la resistenza di un dato materiale per unità di sezione e di lunghezza (nel nostro caso per un filo di sezione pari a $1mm^2$ e lungo 1m), permettendoci così un confronto diretto fra i vari materiali.

Prove di verifica

1) Il rame ha una resistività di 0,017$\Omega \cdot mm^2/m$, il carbonio di 35$\Omega \cdot mm^2/m$ e il vetro di $10^{16} \Omega \cdot mm^2/m$. Quale di questi è il più conduttore e quale il più isolante?

2) Che resistività dovrebbe avere un conduttore "ideale" ? E un isolante ideale?

3) Un filo di rame della stessa sezione di un filo di costantana (una lega di nichel e rame con ρ = 0,49 $\Omega\ mm^2/m$) dovrebbe essere più o meno lungo per avere la stessa resistenza?

4) Sei in grado, dopo quanto hai appreso, di caratterizzare meglio la distinzione fra isolanti e conduttori?

5) Un filo di rame di sezione "molto piccola" e "molto lungo" può avere una resistenza molto grande; posso dire che il rame è diventato un isolante?

6) Determina la resistività del rame utilizzando una matassa di filo da impianti elettrici da 100m di lunghezza.

7) Chiarisci qual è la differenza fra resistenza e resistività.

8) Chiarendo il motivo, a quali di queste grandezze assoceresti la resistività: peso, peso specifico, volume.

9) Il legno ha una resistività così elevata che un ohmmetro non è in grado di misurarla, ma un lapis, rivestito esternamente di legno, ha un'anima di grafite della quale possiamo misurare la resistenza. Togliendo il rivestimento alla sommità del lapis (senza rovinarlo) si raggiunge l'estremo opposto alla punta. Misurando la resistenza fra le due estremità della grafite e le dimensioni geometriche, calcola la resistività di questo materiale.

10) Dimostra, eseguendo tutti i passaggi, che da $R = \rho \frac{l}{S}$ si ottiene $\rho = R \frac{S}{l}$.

11) La resistenza di un filo non è inversamente proporzionale al raggio, potrebbe essere inversamente proporzionale alla circonferenza?

12) Realizza una tabella delle resistività per alcuni dei materiali riportati sui manuali o sul libro di testo.

Le ragioni fisiche di una legge

Abbiamo visto che la resistenza è inversamente proporzionale alla sezione e non al raggio. Perché avviene questo? La ragione ha a che vedere con il movimento delle cariche all'interno del filo.

La figura seguente riporta due ipotesi possibili: la corrente scorre in tutto lo spazio a sua disposizione all'interno del filo 1, la corrente scorre solo sulla superficie del filo 2.

Nel primo caso le cariche, nel loro movimento da un polo all'altro della pila, occupano tutto lo spazio disponibile e tagliando un filo, se fosse possibile, le vedremmo distribuite in tutta la sezione. Nel secondo caso il movimento delle cariche è concentrato lungo la circonferenza di una sezione di un filo. Ma circonferenza e raggio sono fra loro proporzionali (raggio e sezione non sono proporzionali), perché $C=2\pi r$. C e r sono le variabili e 2π è la costante di proporzionalità. Se la resistenza non è inversamente proporzionale al raggio, allora non è neppure inversamente proporzionale alla circonferenza.

Dalle misurazioni effettuate sulla resistenza al variare della sezione possiamo allora concludere che l'ipotesi possibile è la prima, cioè la corrente scorre attraverso tutta la sezione del filo e non solo sulla sua superficie: la resistenza dipende infatti dalla sezione del filo e non dalla circonferenza.

Le conclusioni che abbiamo raggiunto meritano una riflessione: abbiamo dato uno sguardo a quello che accade all'interno del filo senza guardare direttamente dentro, ma attraverso l'uso dei dati raccolti e del ragionamento.

Prove di verifica

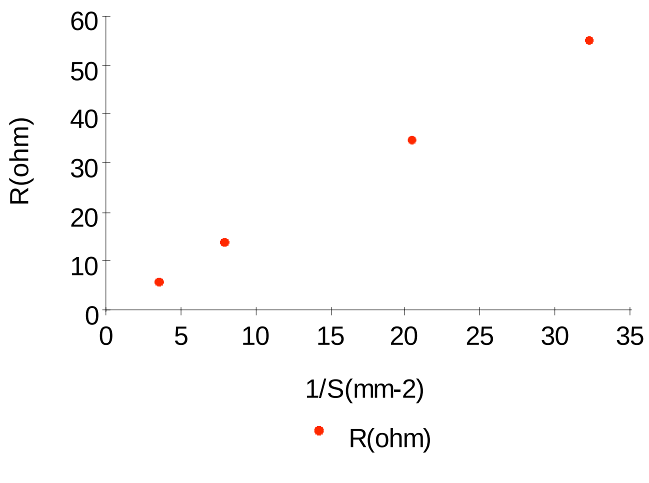
1) Supponiamo che la corrente scorra solo sulla superficie del filo (cosa non vera come abbiamo visto), come modifichereste la seconda legge di Ohm.

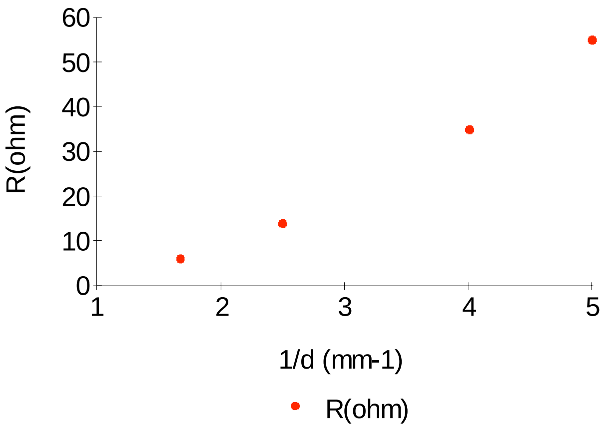
Note per il lavoro

Il filo resistivo per le prove sperimentali è stato ricavato da un vecchio reostato non più funzionante. La resistività di questo materiale è di circa 30Ω per ogni metro. Quattro fili in parallelo (come le corde di una chitarra) sono stati fissati su una canaletta di plastica da impianti elettrici. Con questa struttura è facile, collegando opportunamente gli estremi, realizzare delle configurazioni di fili in serie e parallelo. Un'altra possibilità può essere quella di utilizzare la costantana che ha una resistività di 0,49 Ω mm^2/m. E' quindi necessario scegliere una lunghezza e una sezione opportune. Un filo di diametro pari a 0,4 mm ha una resistenza di circa 4Ω per metro. Nell'eseguire le misurazioni è necessario prestare attenzione ai contatti fra il tester e i fili che devono essere puliti e strinti bene, altrimenti si inserisce un'ulteriore resistenza. Considerando questa resistenza di circa un ohm, si possono mettere in serie dei pezzi di filo lunghi alcuni metri in modo da rendere trascurabile la resistenza di contatto. L'operazione può essere eseguita anche senza tagliare i fili ma considerando un unico filo abbastanza lungo di cui si misura la resistenza di porzioni di diversa lunghezza.

Il ragionamento con i fili in parallelo può anche essere sostituito da un lavoro con fili di diversa sezione. Questo però comporta la necessità di acquistare più rocchetti di costantana. Disponendo di una sola sezione si può ragionare sulla variazione di sezione mettendo in parallelo i fili. In questo caso il problema della misura della resistenza va valutato con maggiore attenzione, perché all'aumentare del numero di fili in parallelo, la resistenza totale diminuisce. Operando con quattro fili di dieci metri di lunghezza ciascuno (per facilitare le operazioni i fili possono essere avvolti su dei cilindri di cartone), e quindi di circa 40Ω, con il primo parallelo, la resistenza si riduce a 20Ω, con il parallelo fra tre fili si ottiene 13,3Ω, e con quattro fili in parallelo 10Ω. Non dovrebbero esserci problemi. Con fili di sezione inferiore o di materiali con maggiori resistività le cose vanno ancora meglio.

Con dati sperimentali si sono ottenuti i seguenti grafici per R e 1/S e R e 1/d (questo secondo è stato tracciato in funzione dell'inverso del diametro) che permettono di ragionare sulla presenza o l'assenza di proporzionalità diretta.




R(ohm)
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
1/d (mm-1)
R(ohm)

Il piacere di fare matematica

di Donatella Merlo

Non è vero che esiste una predisposizione alla matematica che sia prerogativa di pochi eletti, mentre è purtroppo vero che è più facile sentir dire “Io di matematica non ho mai capito niente” anziché “Mi piace fare matematica”. Sono convinta però che la responsabilità di questa situazione non risieda tanto nelle doti più o meno innate di ciascuno di noi, quanto piuttosto nella fortuna o meno di aver incontrato nel proprio cammino scolastico bravi insegnanti di matematica.

Io ho avuto questa fortuna: ho imparato la matematica da insegnanti che oltre a essere bravi a insegnare riuscivano a trasmettere anche la loro passione per la materia.

Per insegnare bene una materia bisogna sicuramente amarla. Ma non basta. Occorre anche una buona padronanza dei contenuti e la capacità di entrare in risonanza con le conoscenze ancora in embrione nella mente degli allievi. Cerchiamo di capire perché.

Ciascuno di noi quando si trova in una situazione di apprendimento deve poter collegare in qualche modo le nuove conoscenze con quelle che già possiede: questo permette di capire.

Un bravo insegnante dovrebbe tradurre in metodo questo dato di fatto e organizzare gli interventi didattici intorno ad attività che consentano agli allievi di trovare quella risonanza, ma anche di trarre la motivazione necessaria, per compiere l’inevitabile sforzo dell’imparare, dalla consapevolezza di affrontare una sfida, in primo luogo con se stessi.

L’unico modo per creare le condizioni necessarie allo sviluppo di questo processo è mettere l’allievo in un contesto che richieda la risoluzione di un problema. Il problema deve essere tale da incorporare i nuovi saperi in modo naturale, affinché l’allievo trovi parole, gesti, strumenti che lo conducano alla soluzione. Questo processo però non deve avvenire in solitudine ma in una situazione sociale, di interazione e di scambio, passa attraverso l’esplicitazione e la condivisione di ciò che sa per comunicarlo ai compagni e all’insegnante. È come se ciascun allievo mettesse il tassello di un puzzle sul tavolo e poco per volta ogni tassello spostato e accostato ad altri da tante mani che lavorano con lo stesso scopo, assumesse via via la forma giusta, ogni pezzo si va a incastrare per comporre il disegno complessivo del sapere con soddisfazione di tutti.

Per creare questo ambiente di apprendimento ci vuole, da parte dell’insegnante, molta umiltà, molto rispetto, molta capacità di ascolto degli allievi e anche la rinuncia a esprimere giudizi e a tracciare strade forzando verso soluzioni canoniche. Anche strade più lunghe e meno formalizzate possono condurre alla soluzione e acquisiscono valore dall’essere il prodotto di un pensiero autonomo e creativo.

Un altro elemento indispensabile infatti è la condivisione di idee, strategie, rappresentazioni perché nel momento in cui si rende esplicito, in una situazione di classe, il proprio pensiero si producono due effetti: si chiariscono le proprie idee e si apre la possibilità agli altri (ai compagni in questo caso) di fare proprie le idee di un altro e di rielaborarle, trasformandole, se necessario, fino a portare a compimento, tutti insieme, come un corpo unico, il processo di costruzione di nuova conoscenza.

Io ho sperimentato per molto tempo questa modalità di lavoro grazie al lavoro svolto nel Nucleo di ricerca didattica di cui faccio parte. Lì ho imparato tutto, dai miei errori come dagli errori degli altri, discutendo, progettando, studiando, leggendo, mettendomi in gioco con tutte le mie capacità e… incapacità. Ciò che ho ottenuto è qualcosa di unico.

Trovare un problema adatto, che funziona, che faccia scattare il processo di apprendimento non è facile, non è una cosa che l'insegnante possa fare da solo.

Per questo occorre un esperto della disciplina e un gruppo di lavoro che sia disponibile a sperimentare e a fallire qualche volta, ma soprattutto a documentare il lavoro svolto per poter avviare un processo di riflessione comune su quanto è successo e capire che cosa è meglio fare per raggiungere l'obiettivo. È un lavoro lungo e faticoso, e non tutti gli insegnanti sono disposti a fare questo sforzo. Ma ultimamente, nel mio 'girovagare' per fare formazione, ho visto tanti occhi di insegnanti accendersi e brillare di fronte a proposte didattiche costruite tenendo presenti questi principi.

Secondo me l'unica formazione che funziona è quella che obbliga gli insegnanti a mettersi in gioco a livello adulto confrontandosi con il proprio sapere matematico e con le proprie lacune. Per questo non amo le conferenze di matematica, ma preferisco adottare per la formazione la modalità laboratoriale: gli insegnanti provano su di sé quello che poi andranno a proporre ai loro allievi, sperimentano le ansie e le difficoltà, ma provano anche l'entusiasmo e la soddisfazione proveniente dall'aver trovato la strada giusta per risolvere un problema. Si confrontano spesso con i propri errori e forse capiscono quel che provano gli studenti quando un errore viene evidenziato dall'insegnante mettendo in ridicolo chi l'ha prodotto. Il discorso sugli errori di solito è uno dei primi a dover essere affrontato: con gli allievi come con gli insegnanti. L'allievo deve sapere che risolvendo un problema può sbagliare perché l'errore fa parte integrante del processo risolutivo e rappresenta un momento di crescita cognitiva. L'insegnante deve trasmettere questa idea con le azioni che compie, con il metodo di lavoro che utilizza.

Ogni volta che proponevo un problema ai miei allievi sapevo che ci sarebbero state soluzioni errate, anzi speravo che emergessero perchè le prevedevo già in fase di progettazione e sapevo che mi servivano per poter avviare la discussione sulle strategie trovate dagli allievi. Alcuni errori sono tipici e si ripresentano tutte le volte che si propone una certa situazione problematica da risolvere. Sono la ricchezza della situazione stessa perché solo affrontandoli si impara. Se non ci sono errori, vuol dire che si è calibrato male il lavoro, vuol dire che il sapere in gioco era già dato e non in fase di costruzione, in *zona di sviluppo prossimale*. La prima cosa che deve saper fare un insegnante per poter scegliere un problema adatto ai suoi allievi, in un determinato momento del loro percorso di apprendimento, è chiedersi qual è il sapere da far emergere e su quali saperi possano fare affidamento gli allievi per 'attaccare' il problema. Sicuramente, in una prima fase, gli allievi non useranno il sapere oggetto dell'apprendimento, ma si serviranno di conoscenze e di strategie mutuate da esperienze precedenti sia scolastiche che extrascolastiche. Nel corso del lavoro però dovranno poco per volta assumere la consapevolezza che il sapere 'nuovo' è indispensabile per risolvere quel problema o, per lo meno, risulta più economico utilizzarlo per arrivare alla soluzione.

Lo strumento che consente agli allievi di passare dal piano dell'esperienza a quello della conoscenza è la discussione con i compagni mediata dall'insegnante. È indispensabile, come dicevo già prima, passare attraverso la comunicazione. Il contesto comunicativo mette tutti nella situazione di dover chiarire il proprio pensiero, farlo diventare linguaggio perchè sia condiviso dagli altri. In matematica, inoltre, l'esercizio della comunicazione porta naturalmente verso l'argomentazione che è un passo importante per giungere poi a comprendere il senso di una delle attività matematiche fondamentali: la dimostrazione.

Finora mi sono limitata ad enunciare le idee che ho maturato nel tempo su come insegnare la matematica in modo da coltivare un amore per questa materia. Ora vorrei illustrare un esempio per rendere il mio pensiero più esplicito.

Un'attività che ho svolto parecchie volte prende avvio, come molte altre che ho avuto occasione di sperimentare, da una storia: questa si intitola "Il figlio del re e il messaggero", è tratta da un racconto di Dino Buzzati ed è stata modificata ad uso didattico nel Nucleo di Ricerca didattica. Questa situazione è stata sperimentata in moltissime classi, anche di scuola media inferiore e superiore, non è quindi una novità.

I contenuti matematici coinvolti sono numerosi ma i principali sono: le potenze e il controllo delle variabili spazio e tempo mediante la rappresentazione con un grafico cartesiano. Questi contenuti la collocano naturalmente in prima media, come viene fatto nel testo Matematica 2001 pubblicato dall'UMI su http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/matematica2001.html, dove la situazione didattica è collocata nel filone sulle Relazioni. Al termine dell'attività gli allievi di solito hanno acquisito una buona competenza nella costruzione, nella lettura e nell'interpretazione di un grafico che facilmente sarà esportabile in altre situazioni in cui entra in gioco la variabile tempo, anche accoppiata ad altre.

Per quanto mi riguarda devo dire che la prima volta che ho sperimentato questa attività ero in una classe quarta e svolgevo un'attività di laboratorio nell'ambito di un progetto ministeriale (ex art.3 DPR 419/74). Successivamente l'ho riproposta più volte sia in quarta che in quinta. Gli allievi di solito hanno svolto in precedenza qualche esperienza con grafici lineari per rappresentare andamenti di temperatura, di rapporto tra pesi e prezzi di una merce, di crescita di piante e così via. L'uso del grafico cartesiano però, non è ancora una strategia utilizzata comunemente per risolvere un problema.

Ma veniamo alla storia, che riassumo qui brevemente, rimandando al testo dell'UMI per una lettura completa.

"Il figlio di un re inizia un viaggio nel suo regno, ogni giorno percorre 50 km e alla sera si ferma per riposare con tutto il suo seguito. Alla mattina del secondo giorno, prima di ripartire, il figlio del re chiede al suo messaggero più fidato di tornare al castello per prendere erbe medicinali e notizie dei genitori. Il messaggero parte e viaggia ad una velocità doppia rispetto a quella del figlio del re cioè 100 km all'ora, così raggiunge di nuovo la carovana la sera del terzo giorno. La stessa storia si ripete per altre due volte."

Agli allievi si chiede di prevedere quando avverranno il secondo e il terzo incontro tra il figlio del re e il messaggero.

Per avviare il processo risolutivo, io di solito chiedo a qualche allievo di provare a raccontare la storia con parole sue in modo da verificare se è stato ben compreso quel che succede. Gli altri allievi possono intervenire per correggere o integrare quanto detto dal compagno. Questa fase collettiva serve a far sì che gli allievi prendano in carico il processo risolutivo ma al momento opportuno va interrotta proponendo agli allievi di lavorare in piccoli gruppi. Di solito i gruppi sono eterogenei cioè costituiti da allievi con diversi livelli di competenza, evitando però di mettere insieme alunni di livello basso con alunni di livello molto alto. Al gruppo viene richiesto un protocollo scritto con le previsioni motivate e una rappresentazione della situazione.

Nel piccolo gruppo gli allievi possono esprimersi liberamente e quasi subito cominciano a rappresentare quanto succede con un disegno o qualche forma di schematizzazione. E intanto discutono anche molto animatamente per riuscire a far combaciare la loro ipotesi con l'elemento di validazione scritto nel testo della storia: il fatto che il primo incontro deve avvenire alla sera del terzo giorno.

Le rappresentazioni sono molto interessanti e hanno in comune il fatto che spazio e tempo sono intrecciati, anzi il tempo è ridotto a spazio ed è rappresentato dal tratto percorso dal figlio del re; in pratica una linea individua sia il pezzo di strada percorso dal figlio del re (50 km) sia il tempo trascorso (un giorno), diventando una sorta di unità di misura condivisa, una scansione ritmica che consente agli allievi di tenere sotto controllo quanto succede.

Chi riesce a rappresentare correttamente gli eventi fino al terzo giorno, di solito ha trovato una rappresentazione efficace che gli consente anche di prevedere gli incontri successivi pur facendo degli errori di cui subito difficilmente si accorge. Chi invece non trova una forma di rappresentazione adeguata sovente si perde e non giunge a formulare ipotesi sugli incontri successivi.

In ogni caso, dopo un tempo stabilito in precedenza, l'insegnante deve interrompere l'attività del gruppo e raccogliere gli elaborati prodotti. La fase successiva è a carico solo dell'insegnante che analizza attentamente i prodotti dei gruppi e prepara un cartellone su cui riassume le diverse strategie. Dopo alcuni giorni il cartellone viene presentato alla classe e diventa oggetto di discussione a partire da alcune domande guida dell'insegnante. Il mio Nucleo di ricerca fa riferimento, per la discussione, al canovaccio proposto da M. G. Bartolini Bussi e dal suo gruppo di ricerca, esposto nel testo "Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica" Comune di Modena 1995. Bartolini Bussi suggerisce di iniziare la discussione di bilancio, che avviene dopo le soluzioni individuali o di gruppo, con la domanda: "In quale soluzione fra quelle esposte vi riconoscete? Perché?" Non necessariamente gli allievi debbono riconoscersi in quella che hanno elaborato nel loro gruppo, il distanziamento avvenuto, per il lasso di tempo intercorso fra il momento della soluzione e quello della discussione, facilita la produzione di argomentazioni basate su un'osservazione più 'oggettiva' delle diverse strategie prodotte dai gruppi.

Questo è il momento centrale dell'attività e a questa domanda ne seguiranno altre, formulate dall'insegnante in momenti topici, che inviteranno tutti a soffermarsi sui propri processi risolutivi, a confrontarli con quelli dei compagni con l'obiettivo di *"socializzare e valutare collettivamente le strategie usate dai singoli allievi nella soluzione del problema e costruire (quando possibile) una o più rappresentazioni e soluzioni condivise da tutta la classe e consistenti con quelle costruite a livello adulto per mezzo di concetti e procedure matematiche"* (Bartolini Bussi et al. testo citato). Le discussioni registrate e trascritte diventano il punto di partenza per l'analisi dei processi di apprendimento degli allievi. L'insegnante, ritornando sulle parole dette dagli allievi e rivedendo i loro elaborati può farsi un'idea sufficientemente chiara del sapere in costruzione e del punto preciso a cui si collocano i diversi allievi, degli errori ancora presenti e così via.

Da quanto ho scritto finora pare che il problema si possa risolvere solo leggendo una storia, facendo una rappresentazione e discutendo tutti insieme. Ma non è così. Nel processo di risoluzione intervengono di solito, in modo spontaneo, anche altre modalità, ad esempio l'uso del corpo, di una certa gestualità e di strumenti di vario genere. Farò alcuni esempi.

Nella scuola elementare l'aspetto narrativo della situazione fa sì che gli allievi siano molto coinvolti e che spontaneamente comincino, dopo un po', a rappresentare la storia agendo in prima persona, non si accontentano più di un semplice disegno: qualcuno diventa il principe e qualcun altro il messaggero, un terzo compagno si occupa di rileggere la storia e un altro ancora di scandire il tempo che passa o di segnare sul pavimento dell'aula le varie tappe anche usando sedie o oggetti vari. Quindi c'è movimento in classe, occorre spazio. Le azioni fanno sì che gli avvenimenti della storia siano ben compresi, ma non ci garantisce che tutti giungano alla soluzione: la mediazione dell'insegnante a volte è necessaria, ad esempio nel momento della discussione può riprendere queste forme di rappresentazione corporea e stimolare gli allievi a trovare tutti insieme il modo di rendere coerente ciò che si fa con quanto sta scritto nel testo della storia. Uno dei problemi che emerge quasi subito è la difficoltà nel far muovere 'contemporaneamente' i due protagonisti, soprattutto, quando il primo va in un senso e il secondo in quello opposto: servono tanti occhi che controllano, la soluzione diventa un fatto corale e la riuscita della rappresentazione un evento da festeggiare. Niente può ripagare un insegnante dello sforzo fatto più di quanto lo possano fare gli allievi quando cominciano a battere le mani e a lanciare grida di giubilo perché si è risolto un problema… di matematica.

Parlavo prima di gestualità, intendendo, oltre a quella prodotta con tutto il corpo, anche la gestualità più fine che viene prodotta quando gli allievi rappresentano sul foglio il viaggio del figlio del re e del messaggero.

Una volta tracciate le linee che rappresentano le varie tappe, il movimento dei due personaggi quasi sempre viene rappresentato con gli indici delle due mani che ripercorrono la strada: il dito che rappresenta il figlio del re va sempre nella stessa direzione tappa dopo tappa, quello del messaggero va e viene dal castello, quando i due indici si toccano vuol dire che avviene un incontro. Mi è capitato spesso di guidare la mano dei miei allievi per far loro capire come dovevano muovere le dita per rappresentare correttamente il percorso: questo momento in cui l'insegnante presta la mano è molto importante, forse è un modo di fare che è stato dimenticato perché considerato una forzatura. Veramente tutto ciò che impariamo prima di andare a scuola lo impariamo in questo modo, imitando gli adulti e facendoci guidare la mano: perché non riprenderlo in considerazione in quelle fasi dell'apprendimento in cui si tratta di 'risvegliare' le conoscenze che abbiamo detto essere lì in attesa nella mente dei nostri allievi?

In un'altra situazione, in una scuola media mi è invece capitato di mimare la storia con gli oggetti che erano nel portapenne: il temperino è diventato il messaggero e la gomma il figlio del re e in questo modo è diventato facile farli muovere sul percorso che gli allievi avevano disegnato superando la situazione di stallo che impediva loro di 'vedere' correttamente ciò che succedeva.

Questo ci fa capire come siano diverse le strade attraverso cui si arriva alla comprensione. Ogni allievo ha le sue strategie e l'insegnante non ha che da assecondarlo offrendogli situazioni ricche e stimolanti che lo invitino ad usarle oppure in certi casi può suggerire l'uso del corpo o di gesti e strumenti adatti.

La fase successiva del problema del messaggero richiede che l'allievo rappresenti la situazione attraverso un grafico cartesiano: la difficoltà consiste nel disintrecciare le due variabili spazio e tempo che fino a quel momento sono state trattate insieme. Un modo per tenere sotto controllo il grafico e la storia è quello di creare dei 'punti di riferimento': per gli allievi di solito è importante capire quando il figlio del re e il messaggero viaggiano e quando stanno fermi anche stabilendo degli orari. Se immaginiamo di dividere la giornata in quattro parti possiamo dire che la carovana si mette in marcia alle 6 del mattino e si ferma alle 6 di sera. In questo modo possiamo scandire il grafico in momenti in cui aumentano sia lo spazio che il tempo e in momenti in cui lo spazio rimane invariato e il tempo va avanti. Sul grafico compare così una ritmicità fatta di linee che vanno verso l'alto per indicare la crescita di entrambe le variabili e linee parallele all'asse delle x, quindi orizzontali, che indicano la crescita di una sola delle due, in questo caso il tempo. Questa scansione aiuta a tenere sotto controllo i fatti. Ma mentre la linea che rappresenta ciò che succede al figlio del re ha sempre lo stesso andamento e quindi, una volta individuato il ritmo, va avanti da sola, quella del messaggero presenta qualche difficoltà in più. Come rappresentare il ritorno al castello? Qui di solito emerge il problema più grosso, un misconcetto che può anche risultare di difficile superamento. La linea che tracciamo sul grafico non è il 'percorso', rappresenta la relazione fra due variabili, è un'astrazione del percorso. Questo non è sempre scontato per gli allievi, anche per i più grandi. Gli aspetti percettivi della situazione entrano in conflitto con quelli concettuali e non ci sono stratagemmi didattici per far sì gli allievi non debbano scontrarsi con questa difficoltà. Quindi si affronta con il metodo che dicevo prima: un po' con domande opportune e un po' facendo vedere come si fa. L'errore che fanno gli allievi che non hanno superato questa fase percettiva consiste nel far 'tornare indietro' all'origine dei due assi la linea che rappresenta il messaggero senza tenere conto del fatto che così facendo anche il tempo va indietro. Richiamando gli allievi al significato dei punti, cioè ai valori di x e y dove la linea cambia direzione, quasi tutti si convincono che il messaggero ritorna indietro al castello anche se la linea va avanti: per segnalare il ritorno la linea scende a toccare l'asse delle x.

In questo modo viene condiviso il fatto che l'asse delle x si tocca ogni volta che c'è un ritorno al castello e questo nuovo modello può sostituire gradualmente la precedente convinzione, diventando la chiave per interpretare poi tutto il grafico e usarlo come strumento per risolvere anche il resto del problema cioè trovare gli incontri successivi al primo.

La regolarità di questi incontri dopo 3, 9, 27 giorni suggerisce quasi subito che ci sia una regola moltiplicativa, ma la moltiplicazione è di tipo nuovo, è un x3 che si ripete sempre. Ecco perché questo problema può servire per introdurre le potenze. Che cosa succederà se la storia continua sempre nello stesso modo? Ci saranno anche un quarto, un quinto, un sesto incontro? Gli allievi costruiscono tutti insieme gli incontri successivi calcolando le potenze di 3 e si accorgono che dopo pochi incontri il tempo che passa è superiore a quello di una vita umana e quindi, ad un certo punto, non ha più senso continuare.

L'intreccio fra momenti individuali e di gruppo e momenti collettivi di scambio e di condivisione ha condotto gli allievi a costruire nuovi saperi: saranno saperi stabili? Dureranno nel tempo?

Io penso di sì perché nella mia esperienza queste situazioni diventano prototipi per quei saperi e vengono richiamati dagli stessi allievi quando si trovano in situazioni simili. "È come la storia del messaggero…".

Questo che ho tratteggiato è un modo di imparare non esclusivamente scolastico, ma è il modo in cui ogni individuo impara, indipendentemente dall'età e dalla disciplina. Ne è la riprova il fatto che anche quando lavoro con gli insegnanti mi trovo ad affrontare gli stessi nodi cognitivi e le difficoltà da superare sono le stesse, anche se alcune conoscenze in più aiutano a superarle più in fretta.

L'aspetto fondamentale, però, che forse contribuisce a creare un vero piacere nel fare matematica è che questo modo di lavorare permette all'insegnante di valorizzare i contributi di tutti gli allievi e lo pone sempre in una posizione di ascolto e di attenzione verso ognuno di essi. E di che cosa hanno bisogno gli allievi, se non, prima di tutto, di essere ascoltati?